

代数的トポロジーと 社会的選択理論（前編）

同志社大学 経済学部

田中 靖人

2004年12月7日

目次

1	群	2
1.1	群の定義	2
1.2	群の基本的な性質	3
1.3	部分群, 巡回群	4
1.4	剰余類	5
1.5	正規部分群と商群	6
1.6	準同型と同型, 群の直積	8
2	単体的複体・単体写像と単体近似定理	11
2.1	単体・単体的複体	11
2.2	単体写像	15
2.3	単体の重心分割	16
2.4	単体近似定理	19
3	ホモロジー群	21
3.1	単体的複体の鎖群	21
3.2	境界準同型	22
3.3	単体的複体のホモロジー群	23
3.4	単体写像と誘導準同型	25
3.5	位相空間の連結性	27
3.6	単体的複体の連結性とホモロジー群	32
3.7	ホモロジー代数, 完全系列	36
3.8	鎖複体	38
3.9	マイヤー・ビートリス完全系列	42
3.10	隣接する単体写像	43
3.11	単体的複体の重心分割のホモロジー群	45
3.12	連続関数と誘導準同型	47
3.13	ホモロジー群のホモトピー型不変性	48
3.14	単体的複体の積空間	49
3.15	位相空間のホモロジー群	52
3.16	ホモロジー群と写像度	58
4	社会的選択理論への応用	59
4.1	連続性, 匿名性, 全員一致性を満たす社会的選択ルール	59
4.2	連続性, パレート原理を満たす社会的選択ルール	61
4.3	連続性に類似した社会的選択ルールの条件 (近接性の保存) について	64
4.3.1	近接性の保存 1	64
4.3.2	近接性の保存 2 (距離の調和性)	66
4.3.3	近接性の保存 3 (距離の単調性)	67

4.3.4 近接性の保存 4 ((匿名性に沿った) 距離の単調性) 69

まえがき

本稿は『経済学のための位相数学の基礎とブラウワーの不動点定理』(中央大学経済研究所 Discussion Paper Series No. 39, 2003 年 2 月 27 日, 以下本文中で『位相数学の基礎』として参照する)の続編であり, 代数的トポロジーを用いた社会的選択理論 (social choice theory, 「社会選択理論」とも言うがここでは社会的選択理論と呼ぶ) のためにホモロジー群を中心に代数的トポロジーの基礎とその社会的選択理論への応用の一端を紹介するものである。「連続性に類似した社会的選択ルールの条件」の内容の理解にはトポロジーの知識は必要ないが, トポロジーを用いた社会的選択理論で仮定される連続性に似た概念が用いられているのでここに含めた。後編ではアローの一般可能性定理などのトポロジー的表現について考察する予定にしている。

2004 年 12 月 田中靖人

1 群

1.1 群の定義

ある集合を G とし, その任意の 2 つの要素 (元, element) x と y についてある演算 $*$ を施して得られる要素が G に属するものとする, すなわち $x * y \in G$ 。

定義 1.1 (群). ある集合 G と, G について定義された演算 $*$ が次の条件を満たすとき G は (演算 $*$ に関して) 群 (group) であると言う。

- (1). すべての G の要素 x, y および z について $(x * y) * z = x * (y * z)$ (結合法則) が成り立つ。
- (2). G のすべての要素 x について $e * x = x * e = x$ を満たす $e \in G$ が存在する。 e を G の単位元 (identity element) と呼ぶ。
- (3). G の各要素 x について $x * x' = x' * x = e$ を満たす $x' \in G$ が存在する。 x' を x の逆元と呼ぶ。

また

すべての G の要素 x, y について $x * y = y * x$ (交換法則)

が成り立つとき G は可換群 (commutative group) またはアーベル群 (Abelian group) であると言う。

群の要素の数を位数 (order) と呼ぶ。位数が有限の群を有限群, 位数が有限ではない群を無限群と呼ぶ。

演算は乗法 (掛け算) の形で表されることが多く, その場合 $x * y$ を積と呼んで単に xy と書き, 単位元は 1, x の逆元は x^{-1} と表される。アーベル群の場合には演算を加法 (足し算) で表すことがあり, その場合 $x * y$ を和と呼んで $x + y$ と書き, 単位元は 0, x の逆元は $-x$ と表される。演算が加法で表される場合アーベル群は加群 (additive group) と呼ばれる。

次の例が示すように結合法則は 3 つの要素の場合だけでなく 4 つ以上の要素の場合にも拡張される。

例 1.1 (一般的な結合法則). ある群の 4 つの要素 x_1, x_2, x_3, x_4 について $(x_1 x_2)$ を 1 つの要素と見れば $((x_1 x_2) x_3) x_4 = (x_1 x_2) (x_3 x_4)$ が成り立つ。同様にして $(x_1 x_2) (x_3 x_4) = x_1 (x_2 (x_3 x_4)) = x_1 ((x_2 x_3) x_4) =$

$(x_1(x_2x_3))x_4$ が得られる。

5 つ以上の場合にも同様の関係が成り立つことを帰納的に示すことができる。

- 例 1.2 (群の例).** (1). すべての整数の集合, すべての有理数の集合, すべての実数の集合は, それぞれ加法を演算とするアーベル群であり, またこれらは無限群である。単位元は 0, 要素 x の逆元は $-x$ である。すべての整数からなる群を \mathbb{Z} で表す。
- (2). ゼロを除く有理数の集合, ゼロを除く実数の集合は乗法を演算とするアーベル群である。単位元は 1, 要素 x の逆元は x^{-1} である。これらも無限群である。
- (3). 正の整数 m について, 任意の整数を m で割ったときの余りが等しいとき, それらの整数を同じものと見なした集合を考えると, これは加法を演算として群になる。 m で割ったときの余りを $k(0 \leq k \leq m-1)$ で表し, 余りが k となる整数を k で代表させてそれを $[k]$ と書くと, この群は $\{[0], [1], \dots, [m-1]\}$ と表すことができる。整数 n は $n = ml + k$ (l はある整数) と表されるので, 別の整数を $n' = ml' + k'$ (l' はある整数) とすると $n + n' = m(l + l') + k + k'$ となり, $n + n'$ を m で割ったときの余りは l, l' に関係なく $k + k'$ の値によって決まる。したがって $k + k'$ を m で割った余りが k'' であれば $[k]$ と $[k']$ の和は $[k'']$ に等しい。この群を \mathbb{Z}_m で表す (負の数, たとえば -3 を 4 で割ったときの余りは $-3 = -4 + 1$ と見なして 1 となる)。これは位数 m の有限群であり, 単位元は $[0]$ (m で割り切れる数を 0 で代表させる) である。

1.2 群の基本的な性質

演算を乗法で, 単位元を 1 で表して群 G の基本的な性質を調べる。

補題 1.1. 群 G においてすべての要素 x について $1x = x1 = x$ を満たす単位元はただ 1 つである。

証明. f を, すべての $x \in G$ について $fx = x$ を満たす G の要素であるとする, ($x = 1$ として) $f = f1 = 1$ を得る。同様に g をすべての $x \in G$ について $xg = x$ を満たす G の要素であるとする, ($x = 1$ として) $g = 1g = 1$ を得る。☺

補題 1.2. G の各要素 x はただ 1 つの逆元 x^{-1} を持つ。

証明. 群の定義によって x には少なくとも 1 つの逆元, すなわち $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$ を満たす x^{-1} が存在する。 z が $xz = 1$ を満たす任意の要素であるとしよう。すると $z = 1z = (x^{-1}x)z = x^{-1}(xz) = x^{-1}1 = x^{-1}$ が得られるから $z = x^{-1}$ である。同様に w が $wx = 1$ を満たす任意の要素であるとする, $w = w1 = w(xx^{-1}) = (wx)x^{-1} = 1x^{-1} = x^{-1}$ より $w = x^{-1}$ である。☺

単位元 1 の逆元は 1 自身である。

補題 1.3. x, y を G の要素とすると $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ である。

証明. 演算の結合法則を用いて

$$(xy)(y^{-1}x^{-1}) = x(y(y^{-1}x^{-1})) = x((yy^{-1})x^{-1}) = x(1x^{-1}) = xx^{-1} = 1$$

を得る。同様に

$$(y^{-1}x^{-1})(xy) = y^{-1}((x^{-1}x)y) = y^{-1}(1y) = y^{-1}y = 1$$

したがって $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ である。☺

$x^{-1}x = 1$ (および $xx^{-1} = 1$) より $(x^{-1})^{-1} = x$ である。

群 G の任意の要素 x について $x^1 = x, x^2 = xx, x^n = x^{n-1}x$ のように表し、また $x^0 = 1$ と定義する。さらに x^n の逆元を x^{-n} で表す。そのとき x^n は x^{-n} の逆元である。

定理 1.4. x を G の任意の要素とすると、すべての整数 m, n について $x^{m+n} = x^m x^n$ および $x^{mn} = (x^m)^n$ が成り立つ。

証明. (1). $m = 0$ または $n = 0$ のときには明らかに $x^{m+n} = x^m x^n$ が成り立つ。 m, n がともに正の場合を考える。上の定義から $x^{m+n} = x^{m+n-1}x = (x^{m+n-2}x)x$ であるが結合法則によつて $(x^{m+n-2}x)x = x^{m+n-2}x^2$ を得る。同様にして帰納的に $x^{m+n} = x^m x^n$ が得られる。

m, n がともに負の場合は、 $x^{m+n} = x^{n+m} = (x^{-n-m})^{-1}$ より $-m, -n$ が正であるから $x^{m+n} = (x^{-n-m})^{-1} = (x^{-n}x^{-m})^{-1} = x^m x^n$ が得られる。

また m が正、 n が負の場合は上で示した m, n がともに負の場合の結果より $x^n = x^{n+1}x^{-1} = x^{n+2}(x^{-1})^2$ となり帰納的に $x^n = (x^{-1})^{-n}$ が得られ、したがつて結合法則を用いて $m+n \geq 0$ のときは $x^m x^n = x^m (x^{-1})^{-n} = x^{m+n}$ が、 $m+n < 0$ のときは $x^m x^n = x^m (x^{-1})^{-n} = (x^{-1})^{-(m+n)} = x^{m+n}$ (次の (2) で示す公式を用いる) となる。

(2). 次に $x^{mn} = (x^m)^n$ を示す。 $n = 0$ のときには明らかである。 $n > 0$ のときは

$$x^{mn} = x^{m(n-1)+m} = x^{m(n-1)}x^m = x^{m(n-2)}(x^m)^2$$

より帰納的に $x^{mn} = (x^m)^n$ が得られる。一方 $n < 0$ の場合には以下のようにして示される。

$$x^{mn} = x^{-m(-n)} = (x^{m(-n)})^{-1} = ((x^m)^{-n})^{-1} = (x^m)^n$$

☺

アーベル群について演算を加法で表す場合は x^n は nx と書き、定理 1.4 に相当する式は $(m+n)x = mx + nx$ および $(mn)x = n(m(x))$ と表される。

1.3 部分群, 巡回群

定義 1.2 (部分群). ある群 G の部分集合 H が次の条件を満たすとき G の部分群 (subgroup) であると言う。

- (1). G の単位元は H の要素である。
- (2). H の任意の 2 つの要素の積は H の要素である。
- (3). H の任意の要素の逆元は H の要素である。

部分群について以下の補題を得る。

補題 1.5. X を G の要素とすると、各整数 n について x^n で表される G の要素の全体は G の部分群である。

証明. $H = \{x^n : n \in \mathbb{Z}\}$ とする。 x^0 が G の単位元であるから単位元は H に属する。 H の 2 つの要素を x^m, x^n とすると $x^m x^n = x^{m+n}$ (定理 1.4) によつてそれらの積は H の要素である。また H の要素 x^n の逆元 $(x^n)^{-1}$ について $(x^n)^{-1} = x^{-n}$ が成り立つので、やはり H の要素である。以上により H は G の部分群となる。

☺

補題 1.6. H, K を G の部分群とすると、 $H \cap K$ も G の部分群である。

証明. G の単位元は H にも K にも属しているので $H \cap K$ に属している。 x, y を $H \cap K$ の任意の 2 つの要素とすると xy は H にも K にも属するので $H \cap K$ に属する。さらに $x \in H \cap K$ の逆元 x^{-1} は H にも K にも属するので $H \cap K$ に属する。したがって $H \cap K$ は G の部分群である。 ☺

この補題によりある群 G の 3 つ以上の部分群の共通部分も G の部分群であることを帰納的に示すことができる。

定義 1.3 (x の位数, x によって生成される部分群, 巡回群). 群 G の要素 x について $x^n = 1$ となるような最小の正の整数 n を x の位数 (order) とする。また, ある整数 n について x^n で表される要素だけからなる G の部分群を x によって生成された (generated) 部分群であると言い, x を G の生成元と呼ぶ。群 G のすべての要素が, 1 つの要素 x および整数 n によって x^n と表されるとき G を巡回群 (cyclic group) と呼ぶ。 x の位数が n であれば x によって生成される巡回群の位数も n である*1。

- 例 1.3.** (1). 加法を演算とするすべての整数からなる群 \mathbb{Z} は 1 によって生成される位数無限の巡回群であり, 1 がその生成元である。これは無限巡回群と呼ばれる。
- (2). 正の整数 m について, 任意の整数を m で割ったときの余りが等しいとき, それらの整数を同じものと見なした群 \mathbb{Z}_m は加法を演算とする位数 m の巡回群である。このような群を有限巡回群と呼ぶ。

1.4 剰余類

定義 1.4 (剰余類). H を群 G の部分群, x を G の要素とする。次の式で表される G の部分集合を G における H の左剰余類 (left coset) とする。

$$xH = \{y \in G : \text{ある } h \in H \text{ について } y = xh\}$$

同様に次の式で表される G の部分集合を G における H の右剰余類 (right coset) とする。

$$Hx = \{y \in G : \text{ある } h \in H \text{ について } y = hx\}$$

x として単位元をとれば H 自身が G の左 (または右) 剰余類であることがわかる。

補題 1.7. H を群 G の部分群とすると G における H の左剰余類は次の性質を持つ。

- (1). すべての $x \in G$ について $x \in xH$ である。
- (2). x, y を G の要素とする。そのとき, ある $a \in H$ について $y = xa$ が成り立つならば $xH = yH$, すなわち 2 つの左剰余類は一致する。
- (3). x, y を G の要素とする。そのとき $xH \cap yH \neq \emptyset$ ならば $xH = yH$ である。

証明. (1). $x \in G$ とすると $x = x1$ である (1 は G の単位元)。部分群の定義によって $1 \in H$ であるから $x \in xH$ である。

- (2). x, y を G の要素とし, ある $a \in H$ について $y = xa$ が成り立つと仮定する。するとすべての $h \in H$ について $yh = x(ah)$ および $xh = y(a^{-1}h)$ が成り立つ。 H は G の部分群であるから $ah \in H$ かつ $a^{-1}h \in H$ である。したがって $yH \subset xH$ および $xH \subset yH$ が得られるから, $xH = yH$ である。

*1 $x^n = 1$ ならば $x^{n+1} = x$ などとなり異なる要素は n 個である。

- (3). G の2つの要素 x, y について $xH \cap yH \neq \emptyset$ であると仮定する。 $z \in xH \cap yH$ とすると、ある $a \in H$ および $b \in H$ について $z = xa, z = yb$ と表される。したがって (2) より $zH = xH$ かつ $zH = yH$ が得られるから $xH = yH$ である。

☺

補題 1.8. H を群 G の有限な (要素の数が有限個である) 部分群とすると、 G における H のあらゆる左剰余類は H と同じ数の要素を持つ。

証明. $H = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$ とし (h_1, h_2, \dots, h_m はすべて異なる要素である), x を G の要素であるとする。左剰余類 xH は $j = 1, 2, \dots, m$ について xh_j で表される要素からなる。 j と k を $xh_j = xh_k$ を満たす 1 と m の間の整数とする。すると $h_j = x^{-1}(xh_j) = x^{-1}(xh_k) = h_k$ となるから $j = k$ でなければならない。したがって xh_1, xh_2, \dots, xh_m はすべて異なる要素であるから xH は H と同じ数の要素を持つ。 ☺

1.5 正規部分群と商群

A, B を群 G の部分集合とすると A と B の積 AB が次のように定義される。

$$AB = \{xy : x \in A, y \in B\}$$

特に x を G の任意の要素, A を G の部分集合として, $\{x\}A, A\{x\}$ を xA, Ax で表す。群の演算の結合法則により $(AB)C = A(BC)$ が得られる (A, B, C は G の任意の部分集合)。したがって $(AB)C, A(BC)$ の代わりに ABC と書くことができ、4つ以上の集合の積についても同様に表せる。

A, B, C が G の部分集合であるとして、 $A \subset B$ ならば明らかに $AC \subset BC$ かつ $CA \subset CB$ が成り立つ。

H が群 G の部分群であるとする。 H の2つの要素の積は H の要素であるから $HH \subset H$ である。また任意の $h \in H$ について $h = h1$ (1 は G の単位元で、それは H の要素でもある) が成り立つから $H \subset HH$ である。したがって $HH = H$ を得る。

ここで正規部分群を定義する。

定義 1.5 (正規部分群). 群 G の部分群 N が次の条件を満たすとき正規部分群 (normal subgroup) であると言う。

すべての $n \in N$ および $x \in G$ について $xnx^{-1} \in N$ が成り立つ。

補題 1.9. アーベル群の任意の部分群は正規部分群である。

証明. G をアーベル群, N をその部分群とし, $x \in G, n \in N$ とすると

$$xnx^{-1} = (xn)x^{-1} = (nx)x^{-1} = n(xx^{-1}) = n1 = n$$

が成り立つ。 $n \in N$ であるから $xnx^{-1} \in N$ である。 ☺

補題 1.10. 群 G の部分群 N は次の条件を満たすとき、またそのときにのみ G の正規部分群である。

すべての $x \in G$ について $xNx^{-1} = N$ が成り立つ (これは $\{y : y = xnx^{-1}, n \in N\} = N$ という意味である)。

証明. N が G の正規部分群であるとし、 $x \in G$ とすると $xNx^{-1} \subset N$ である。 x を x^{-1} で置き換えると $x^{-1}Nx \subset N$ が得られる (これらは正規部分群の定義から直接導かれる)。したがって $N = x(x^{-1}Nx)x^{-1} \subset xNx^{-1}$ を得る ($\{y : y = x(x^{-1}nx)x^{-1} = n, n \in N\} = N$ である)。よって $xNx^{-1} = N$ である。

逆に N がすべての $x \in G$ について $xNx^{-1} = N$ を満たす G の部分群であると仮定すると、正規部分群の定義によって N は G の正規部分群である。 ☺

系 1.11. G の部分群 N は次の条件を満たすとき、またそのときにのみ G の正規部分群である。

すべての $x \in G$ について $xN = Nx$ が成り立つ。

証明. N を G の部分群とし、 $x \in G$ とする。 $xNx^{-1} = N$ であれば $xN = (xNx^{-1})x = Nx$ である。逆に $xN = Nx$ であれば $xNx^{-1} = Nxx^{-1} = N1 = N$ である (1 は G の単位元)。したがって $xNx^{-1} = N$ のとき、またそのときにのみ $xN = Nx$ となり、補題 1.10 から結論を得る。 ☺

この系は G の正規部分群 N の右剰余類は常に左剰余類でもあることを意味する。したがって正規部分群については単に剰余類 (coset) と呼ぶことにする。

補題 1.12. N を群 G の正規部分群、 x, y を G の要素とすると、 $(xN)(yN) = (xy)N$ が成り立つ。

証明. N が G の正規部分群であるから $yN = Ny$ であり、したがって

$$(xN)(yN) = x(Ny)N = x(yN)N = (xy)(NN)$$

を得る。 N が G の部分群であることから $NN = N$ であるので $(xN)(yN) = (xy)N$ を得る。 ☺

補題 1.13. N を群 G の正規部分群とする。そのとき、 G における N の剰余類全体の集合は (集合同士の) 積を演算とする群になり、その単位元は N 自身、また任意の $x \in G$ について xN の逆元は $x^{-1}N$ である。

証明. x, y, z を G の任意の要素とする。剰余類 xN と yN の積は $(xy)N$ に等しい (補題 1.12)。これも左剰余類である。 $N = 1N$ であるから N 自身も G における N の剰余類の 1 つである。さらに任意の $x \in G$ について

$$(xN)N = (xN)(1N) = (x1)N = xN$$

$$N(xN) = (1N)(xN) = (1x)N = xN$$

$$(xN)(x^{-1}N) = (xx^{-1})N = N$$

$$(x^{-1}N)(xN) = (x^{-1}x)N = N$$

が成り立つ。上の 2 つの式によって N は単位元となる。また下の 2 つの式によって xN と $x^{-1}N$ が互いに逆元になる。以上によって N の剰余類全体の集合は群の定義に必要な条件を満たしている。 ☺

定義 1.6 (商群). N が群 G の正規部分群であるとする。上で定義した集合同士の積を演算として群の条件を満たす N の G における剰余類の集合を商群 (quotient group) と呼び G/N で表す。

商群 G/N において $x, y \in G$ について $xN = yN$ であるならば xN と yN は同じ要素と見なされ、それを xN で代表させる場合 $[x]$ と表す。

例 1.4 (剰余類と商群の例). 加法を演算とする整数全体の群は \mathbb{Z} で表される。整数の内 5 の倍数の全体からなる集合を

$$(5) = \{5n : n \in \mathbb{Z}\}$$

と表すと、これは加法を演算として \mathbb{Z} の正規部分群となる*2。 (5) の \mathbb{Z} における剰余類は、整数 x, y などに對して $x(5) = \{xm : m \in (5)\}$, $y(5) = \{ym : m \in (5)\}$ (あるいは $x+m, y+m$) などと表されるが、 x と y の差が 5 の倍数 (すなわちある $a \in (5)$ について $y = x + a$ と表される) ならば $x(5) = y(5)$ となり、剰余類は $[0], [1], [2], [3], [4]$ の 5 つしかない。各要素の積 (この場合は和) は $[1] + [2] = [3], [3] + [4] = [2]$ などとなる。この 5 つの剰余類からなる群が商群 $\mathbb{Z}/(5)$ である。

同様に 10 の倍数の全体からなる集合を

$$(10) = \{10n : n \in \mathbb{Z}\}$$

とすると、剰余類は $[0], [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9]$ の 10 個となり、この 10 個の剰余類からなる群が商群 $\mathbb{Z}/(10)$ である。

1.6 準同型と同型, 群の直積

定義 1.7. 群 G から群 K への関数 $\theta : G \rightarrow K$ で次の条件を満たすものを準同型 (または準同型写像) (homomorphism) と呼ぶ。

$$\text{任意の } g_1 \in G, g_2 \in G \text{ について } \theta(g_1 g_2) = \theta(g_1)\theta(g_2)$$

補題 1.14. $\theta : G \rightarrow K$ を準同型, G, K の単位元をそれぞれ $1_G, 1_K$ とすると $\theta(1_G) = 1_K$ であり、またすべての $x \in G$ について $\theta(x^{-1}) = \theta(x)^{-1} (= (\theta(x))^{-1})$ が成り立つ。

証明. $z = \theta(1_G)$ とすると、 $z^2 = \theta(1_G)\theta(1_G) = \theta(1_G^2) = \theta(1_G) = z$ となる。 z の逆元を z^{-1} とすると $z^{-1}z^2 = z = z^{-1}z = 1_K$ が得られる。

x を G の要素とする。 $\theta(x^{-1})$ は $\theta(x)\theta(x^{-1}) = \theta(xx^{-1}) = \theta(1_G) = 1_K$ を満たし、同様に $\theta(x^{-1})\theta(x) = \theta(x^{-1}x) = 1_K$ を満たす。したがって $\theta(x^{-1}) = \theta(x)^{-1}$ である。 ☺

準同型 $\theta : G \rightarrow K$ が G から K への全単射のときは同型 (isomorphism) と呼ばれ、そのときは群 G と群 K は同型 (isomorphic) であると言い $G \cong K$ と表す。 G と K が同型ならば、 G の要素と K の要素とは 1 対 1 に対応し、同型な群は同じ群と見なされる。明らかに同型という関係は同値関係である。すなわち G と H が同型で、 H と K が同型ならば G と K も同型となる。

定義 1.8 (準同型の核). 準同型 $\theta : G \rightarrow K$ によって K の単位元に移される要素全体の集合 (G の部分集合) を θ の核 (kernel) と呼び $\ker \theta$ と表す。

補題 1.15. $\ker \theta = \{1_G\}$ であれば、またそのときにのみ準同型 $\theta : G \rightarrow K$ は単射である。

証明. θ が単射であるとする。 $\ker \theta$ の任意の要素 a について $\theta(a) = 1_K$ となるが $\theta(1_G) = 1_K$ であるから $\theta(a) = \theta(1_G)$ である。 θ は単射であるから $a = 1_G$ となり $\ker \theta = \{1_G\}$ である。

逆に $\ker \theta = \{1_G\}$ と仮定する。 $\theta(a) = \theta(b)$ ならば $\theta(ab^{-1}) = \theta(a)\theta(b)^{-1} = 1_K$ であり $ab^{-1} \in \ker \theta$ が得られる。したがって $ab^{-1} = 1_G$, すなわち $a = b$ であるから θ は単射である。 ☺

*2 5 の倍数の和はやはり 5 の倍数であり、ある 5 の倍数を m とすると任意の整数 n について $n + m - n = m$ はもちろん 5 の倍数である。

補題 1.16. G, K を群, $\theta: G \rightarrow K$ を G から K への準同型とする。そのとき θ の核 $\ker \theta$ は G の正規部分群である。

証明. x, y を $\ker \theta$ の要素, 1_K を K の単位元とすると $\theta(x) = 1_K$ かつ $\theta(y) = 1_K$ である。一方 $\theta(xy) = \theta(x)\theta(y) = 1_K 1_K = 1_K$ であるから $xy \in \ker \theta$ である。また, $\theta(x^{-1}) = \theta(x)^{-1} = 1_K^{-1} = 1_K$ であるから $x^{-1} \in \ker \theta$ である。したがって $\ker \theta$ は K の部分群である。さらに, $g \in G, x \in \ker \theta$ のとき

$$\theta(gxg^{-1}) = \theta(g)\theta(x)\theta(g)^{-1} = \theta(g)\theta(g)^{-1} = 1_K$$

より $\ker \theta$ は K の正規部分群であることがわかる。 ☺

補題 1.17. G, K を群, $\theta: G \rightarrow K$ を G から K への準同型とし, また N を G の正規部分群で $N \subset \ker \theta$ であると仮定する。そのとき準同型 $\theta: G \rightarrow K$ から $gN \in G/N$ を $\theta(g)$ に対応させる準同型 $\hat{\theta}: G/N \rightarrow K$ が導かれる。この $\hat{\theta}$ について $N = \ker \theta$ のとき, またそのときのみ $\hat{\theta}: G/N \rightarrow K$ は単射である。

証明. (1). x, y を G の要素とすると $x^{-1}y \in N$ のとき, またそのときのみ $xN = yN$ である。これは以下のように確認できる。

$x^{-1}y \in N$ ならば, ある $n \in N$ があって $x^{-1}y = n$ となるが, そのとき $y = xn$ と表されるので補題 1.7 により $xN = yN$ である。逆に $xN = yN$ であればすべての $n \in N$ に対してある $n' \in N$ について $xn' = yn$ となるが, これから $n' = x^{-1}yn$ となり $x^{-1}y = n'n^{-1} \in N$ が導かれる。

また, $x^{-1}y \in \ker \theta$ のとき, またそのときのみ $\theta(x) = \theta(y)$ である。これは以下のように確認できる。

$x^{-1}y \in \ker \theta$ ならば $\theta(x^{-1}y) = \theta(x)^{-1}\theta(y) = 1_K$ より $\theta(x) = \theta(y)$ が得られる。逆に $\theta(x) = \theta(y)$ であれば $\theta(x)^{-1}\theta(x) = \theta(x^{-1})\theta(y) = \theta(x^{-1}y) = 1_K$ より $x^{-1}y \in \ker \theta$ を得る。

したがって $N \subset \ker \theta$ のとき $xN = yN$ ならば $\theta(x) = \theta(y)$ となり $\theta: G \rightarrow K$ から $xN \in G/N$ を $\theta(x)$ に対応させる関数 $\hat{\theta}: G/N \rightarrow K$ が導かれる。 $\hat{\theta}((xN)(yN)) = \hat{\theta}(xyN) = \theta(xy) = \theta(x)\theta(y) = \hat{\theta}(xN)\hat{\theta}(yN)$ であるから, この関数は準同型である。

(2). 次に $N = \ker \theta$ と仮定してみよう。そのとき $xN = yN$ ならば, またその場合にも $\theta(x) = \theta(y)$ である。したがって準同型 $\hat{\theta}: G/N \rightarrow K$ は単射 (異なる xN は異なる $\theta(x)$ に移される) となる。逆に $\hat{\theta}: G/N \rightarrow K$ が単射であれば $\theta(1_G) = 1_K$ であるから $\hat{\theta}(1_G N) = \hat{\theta}(N) = 1_K$ であり, $n \in N$ について $\hat{\theta}(nN) = \hat{\theta}(N) = 1_K$ であるので $\theta(n) = 1_K$ でなければならず N は θ の核 ($N = \ker \theta$) である。 ☺

この補題から次の定理が得られる。

定理 1.18 (準同型定理). G, K を群, $\theta: G \rightarrow K$ を G から K への準同型とすると $\theta(G)$ と $G/\ker \theta$ は同型, すなわち $\theta(G) \cong G/\ker \theta$ である*³。

証明. 上の補題により準同型 $\hat{\theta}: G/\ker \theta \rightarrow K$ は単射であるが, K を $\theta(G)$ に置き換えれば全単射となる。 ☺

補題 1.19. G を群, H を G の部分群, N を G の正規部分群とする。そのとき $HN = \{hn : h \in H, n \in N\}$ で定義される集合は G の部分群である。

*³ $\theta(G)$ は θ によって移される G の要素の像全体の集合であり, $\text{image } \theta$ と書かれる。

証明. まず HN は G の単位元を含む。 x, y を HN の要素とすれば xy, x^{-1} が HN に属することを示さなければならない。 h, k を H の要素, u, v を N の要素として $x = hu, y = kv$ と表すことができる。したがって $xy = hukv = (hk)(k^{-1}ukv)$ であるが N は正規部分群であるから $k^{-1}uk \in N$ である。したがって $k^{-1}ukv \in N$ であり, 一方 $hk \in H$ であるから $xy \in HN$ が導かれる。

次に $x^{-1} \in HN$ を示す。 $x^{-1} = u^{-1}h^{-1} = h^{-1}(hu^{-1}h^{-1})$ であるが, $h^{-1} \in H$ (H が G の部分群であることより), $hu^{-1}h^{-1} \in N$ である (N が G の正規部分群であることより)。したがって $x^{-1} \in HN$ を得る。 ☺

以上をもとに次の定理を得る。

定理 1.20 (第一同型定理). G を群, H を G の部分群, N を G の正規部分群とする*4。そのとき

$$\frac{HN}{N} \cong \frac{H}{N \cap H}$$

が成り立つ。

証明. HN/N の各要素はある $h \in H$ について hN の形で表される N の剰余類である。したがって, すべての $h \in H$ について $\varphi(h) = hN$ とおくと $\varphi: H \rightarrow HN/N$ は全射準同型となり*5, また $\ker \varphi = N \cap H$ である。

これは, $n \in N \cap H$ について $nN = N$ であり, $x \notin N$ については $xN \neq N$ であること, および商群の単位元は N 自身であることより導かれる*6。

定理 1.18 により $\varphi(H) \cong H/\ker \varphi$ であるから $HN/N \cong H/(N \cap H)$ が得られる (φ が全射であるから $\varphi(H) = HN/N$ である)。 ☺

定理 1.21 (第二同型定理). M, N を G の正規部分群で $M \subset N$ であるとする

$$\frac{G}{N} \cong \frac{G/M}{N/M}$$

が成り立つ。

証明. すべての $g \in G$ について gM を gN に対応させる準同型 $\theta: G/M \rightarrow G/N$ が定義される。さらに $\theta: G/M \rightarrow G/N$ は全射であり $\ker \theta = N/M$ である。

G の要素 g, h が, ある $a \in M$ について $h = ga$ と表されるとき $gM = hM$ であったが, $M \subset N$ である (したがって $a \in N$) からそのとき $gN = hN$ でもある。よって $gM = hM$ のときは常に $gN = hN$ であり, すべての異なる gN に対応する gM が存在するから $\theta: G/M \rightarrow G/N$ は全射である ($gN \neq hN$ ならば $gM \neq hM$)。

$n \in N$ について $\theta(nM) = nN = N$ である。一方, $g \notin N$ について $\theta(gM) = gN \neq N$ であるから $\ker \theta = N/M$ である。

*4 $1 \in H$ なので, すべての $n \in N$ について $n \in HN$ であるから $N \subset HN$ であり, N は HN の正規部分群である。

*5 HN の要素は $h \in H, n \in N$ について hn と表されるから, HN/N の要素は hnN と表される集合 $\{y \in G: y = hnn', hn \in HN, n' \in N\}$ であるが $nn' \in N$ なので $n'' = nn'$ とするとこの集合は $\{y \in G: y = hn'', h \in H, n'' \in N\}$ と表すことができる。これは H/N と表されるようにも見えるが N が H の部分群であるとは限らないので H/N が定義できない場合もあり得る。 N が H の部分群であれば $HN = H$ である。また $k \in H$ について $\varphi(hk) = hkN = hNkN = \varphi(h)\varphi(k)$ である (準同型)。

*6 $n \in N$ について $xn \in N$ であれば, ある $n' \in N$ について $xn = n'$ となるが, そのとき $x = n'n^{-1} \in N$ となり矛盾である。

定理 1.18 より $\theta(G/M) \cong (G/M)/\ker \theta$ であるから、 G/N と $(G/M)/(N/M)$ とは同型である。 ☺

定義 1.9 (群の直積). G_1, G_2, \dots, G_n を群とし、 G をそのデカルト積を $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ とする。 G の要素は各 $x_i \in G_i (i = 1, 2, \dots, n)$ として (x_1, x_2, \dots, x_n) と表され、また G の 2 つの要素の積は

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)(y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n)$$

のように定義される。そのとき G はこの演算によって群となる。結合法則は各成分の結合法則から導かれ、単位元は $(1_1, 1_2, \dots, 1_n)$ (各 1_i は G_i の単位元) であり、 (x_1, x_2, \dots, x_n) の逆元は $(x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_n^{-1})$ である。このような群 G を G_1, G_2, \dots, G_n の直積 (direct product) と呼び、 $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ と表す。各 G_i がアーベル群の場合は演算を加法で表し、直積を直和と呼んで $G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_n$ と表す。

アーベル群 G の任意の要素 g がその元 x_1, x_2, \dots, x_n によって

$$g = n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_n x_n \quad (n_1, n_2, \dots, n_n \text{ は整数})$$

と表されるとき x_1, x_2, \dots, x_n を G の生成元と呼ぶ。特にそれらが一次独立であれば基 (basis, あるいは基底) と呼ばれる。そのとき g の表し方は一意である。例えば $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ の要素 g は $(1, 0)$, $(0, 1)$ を生成元として $g = n_1(1, 0) + n_2(0, 1)$ と表されるが、 $(1, 1)$ を加えて $g = n_1(1, 0) + n_2(0, 1) + n_3(1, 1)$ と表すこともできる。しかし $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ は一次独立ではないのでこの表現は一意ではない。これらは生成元ではあるが基ではなく、基は $(1, 0)$, $(0, 1)$ である。無限巡回群 \mathbb{Z} の基は 1 または -1 である。

2 単体的複体・単体写像と単体近似定理

2.1 単体・単体的複体

まずユークリッド空間における点の位置関係について定義する。

定義 2.1 (幾何学的に独立 (アフィン独立)). あるユークリッド空間 \mathbb{R}^k の点 $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q$ が次の条件を満たすとき幾何学的に独立 (geometrically independent), あるいはアフィン独立 (affine independent) であると言う。

連立方程式

$$\sum_{j=0}^q \lambda_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0}$$

$$\sum_{j=0}^q \lambda_j = 0$$

の解は $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_q = 0$ のみである ($\mathbf{0}$ はゼロベクトル, すなわちすべての成分が $\mathbf{0}$ のベクトルである)。

$\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_q = 0$ 以外の解があれば $q + 1$ 個の点の少なくとも一つの座標が他の点の座標によって表されることになる。

3次元ユークリッド空間内に、同一直線上にない3点をとると一つの2次元ユークリッド空間すなわち平面ができ、その平面上のすべての点の座標はその3点の座標によって表すことができる。したがって2次元ユークリッド空間において幾何学的に独立な点は多くても三つである。同様に k 次元ユークリッド空間において幾何学的に独立な点は多くても $k + 1$ 個である。

次に単体を定義する

定義 2.2 (単体 (simplex)). \mathbb{R}^k における q 次元単体とは次のように表される集合である。

$$\left\{ \sum_{j=0}^q t_j \mathbf{v}_j : 0 \leq t_j \leq 1, j = 0, 1, \dots, q, \sum_{j=0}^q t_j = 1 \right\}$$

ただし $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q$ は幾何学的に独立な点である。これらは単体の頂点と呼ばれる。また q を単体の次元 (dimension) と言う。

0 次元単体は一つの点, 1 次元単体は 2 点を結ぶ線分, 2 次元単体は 3 点を頂点とする三角形, 3 次元単体は 4 点を頂点とする四面体である。

ある q 次元単体を σ とすると, σ に含まれる (頂点, 境界, 内部を含めて) 点 \mathbf{x} (の座標) は次のように表される。

$$\sum_{j=0}^q t_j \mathbf{v}_j = \mathbf{x}, \sum_{j=0}^q t_j = 1, 0 \leq t_j \leq 1, j = 0, 1, \dots, q$$

ここで t_0, t_1, \dots, t_q は一意に決まる。なぜならば, もし $\sum_{j=0}^q t_j \mathbf{v}_j = \sum_{j=0}^q s_j \mathbf{v}_j$ かつ $\sum_{j=0}^q t_j = \sum_{j=0}^q s_j = 1$ であるとすると $\sum_{j=0}^q (t_j - s_j) \mathbf{v}_j = \mathbf{0}$, $\sum_{j=0}^q (t_j - s_j) = 0$ となり, $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q$ が幾何学的に独立であることからすべての j について $t_j - s_j = 0$ を得る。 t_0, t_1, \dots, t_q を点 x の重心座標と呼ぶ。

ここで次の補題を示す

補題 2.1. q を負でない整数, σ をユークリッド空間 \mathbb{R}^m における q 次元単体, また τ を $\mathbb{R}^n (n \neq m)$ における q 次元単体とすると ($m \geq q, n \geq q$), σ と τ は同相である。

証明. $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q$ を σ の頂点, $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_q$ を τ の頂点とし, σ 上の点 $\sum_{j=0}^q t_j \mathbf{v}_j$ を τ 上の点 $\sum_{j=0}^q t_j \mathbf{w}_j$ に一対一に移すような同相写像として次式で表される h をとることができる。

$$h \left(\sum_{j=0}^q t_j \mathbf{v}_j \right) = \sum_{j=0}^q t_j \mathbf{w}_j$$

$$\text{ただし, すべての } t_0, t_1, \dots, t_q \text{ について } 0 \leq t_j \leq 1, \text{ かつ } \sum_{j=0}^q t_j = 1$$

☺

次に単体の面を定義する。

定義 2.3 (面 (face)). σ と τ を \mathbb{R}^k における単体であるとする。 τ の頂点の集合が σ の頂点の集合の部分集合である (τ のすべての頂点が σ の頂点でもある) とき τ は σ の面であると言う。ある単体の 1 次元の面を辺 (edge) と呼ぶ。

単体 σ 自身も σ の面であり, σ の頂点, 辺 (1 次元単体) も σ の面である。たとえば 3 次元単体 (四面体) の場合, それ自身, その各面 (4 つある), 各辺 (6 つある), 各頂点 (4 つある) がここで言う面である。

単体それ自身ではない単体の面を真の面 (proper face) と呼ぶことにする。

さらに単体的複体を定義する。

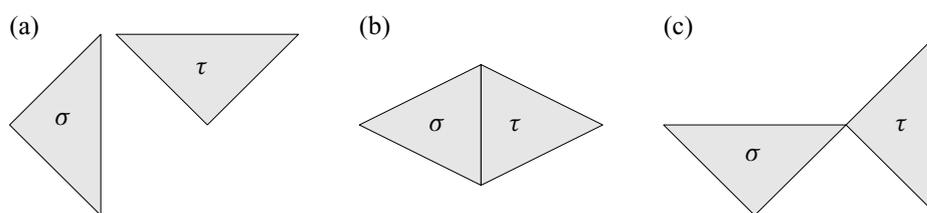
定義 2.4 (単体的複体 (simplicial complex)). \mathbb{R}^k における有限個の単体の集合 K が次の条件を満たすとき単体的複体であると言う。

(1). σ が K に属する単体であるならば, σ のすべての面も K に属している。

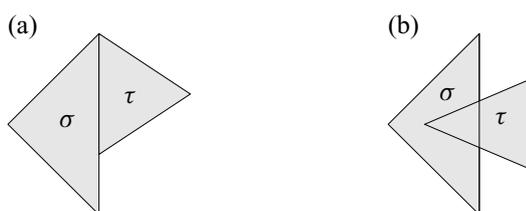
(2). σ_1, σ_2 を K に属する単体とすると, $\sigma_1 \cap \sigma_2$ (σ_1 と σ_2 の共通部分) は空集合である (σ_1 と σ_2 には共通部分がない) か, あるいは $\sigma_1 \cap \sigma_2$ は σ_1 と σ_2 両方の面になっている。

単体的複体とは, 離れた単体同士を組み合わせたものか, またはいくつかの単体同士をつなげて貼り合わせて作ったものであり, 単体同士は離れているか接しているだけで交わってはならず, 接する単体を貼り合わせる場合にはそれぞれの単体の面になっている部分全体を貼り合わせなければならない。複数の三角形を長さが等しい辺で貼り合わせたものや, 頂点で二つの三角形をつなげたものなどは単体的複体であるが, 三角形の1辺の半分の部分に別の三角形を貼り合わせたものなどは単体的複体にはならない。

例 2.1. (1). 二つの単体 σ と τ に対して, 次の三つの図形 (a), (b), (c) は単体的複体である。



(2). 次の二つの図形 (a), (b) は単体的複体ではない。



K が含む単体の内最も大きい次元の単体の次元を K の次元と呼ぶ。 K に属するすべての単体の和集合を $|K|$ で表し多面体と呼ぶ。単体はすべてユークリッド空間のコンパクトな部分集合 (有界閉集合) であるから, その有限個の和集合である多面体もコンパクトである。

ここで次の補題を示す。

補題 2.2. K を単体的複体, X をある位相空間とする。 $|K|$ から X への関数 f は, K の各単体への f の制限がその単体において連続であるとき, K の多面体 $|K|$ において連続である。

証明. 『位相数学の基礎』補題 1.12 により, ある位相空間が有限個の閉集合の和集合として表される場合, ある関数の各閉集合への制限がその閉集合において連続であるとき, その関数は空間全体で連続である。☺

K に属するすべての単体の頂点全体の集合を $\text{Vert}K$ で表す。 K の頂点のある組が K に属するある単体を構成するとき, その頂点の組がその単体を張る (span) と言う。

定義 2.5 (部分複体 (sub-complex)). K を \mathbb{R}^k の単体的複体とする。 K に属する単体の組 L が次の条件を満たすとき K の部分複体であると言う。

σ が L に属する単体であるとき σ のすべての面も L に属する。

K の部分複体はそれ自身単体的複体である。

定義 2.6 (単体の内部 (interior)). $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q$ を \mathbb{R}^k の q 次元単体 σ の頂点とする。 $\sum_{j=0}^q t_j \mathbf{v}_j$ (すべての j について $t_j > 0$ かつ $\sum_{j=0}^q t_j = 1$) のように表される点の集合を σ の内部と呼ぶ。 σ の内部とは σ の真の面に含まれない点の集合である。

0次元単体の場合は1点であるから、それ自身が内部でもある。

単体 σ のあらゆる点はただ一つの σ の面 (σ 自身も含めて) の内部に含まれる。 $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q$ を σ の頂点、 \mathbf{x} を σ のある点とすると、 $\mathbf{x} = \sum_{j=0}^q t_j \mathbf{v}_j$ (すべての j について $0 \leq t_j \leq 1$ かつ $\sum_{j=0}^q t_j = 1$) と一意に表されるが、 \mathbf{x} を内部に含む面はこの式で $t_j > 0$ となっている \mathbf{v}_j によって張られる面である (ある $t_j = 0$ であれば \mathbf{x} を内部に含む面は頂点 \mathbf{v}_j を含まない。すべての t_j がゼロになることはなく必ずある t_j は正である)。

ここで次の補題を示す。

補題 2.3. \mathbb{R}^k の単体のある組を K とし、 K に含まれるすべての単体の和集合を $|K|$ とする。このとき、次の条件が満たされるとき、またそのときにのみ K は単体的複体である。

- (1). K はそれに含まれる単体のすべての面を含む。
- (2). $|K|$ 上のすべての点は K に含まれるある一つの単体の内部に含まれる。

証明. まず K が単体的複体であると仮定してみよう。すると K はそれに属する単体の面を含んでいる。ここで示すべきは $|K|$ のすべての点が K のただ一つの単体の内部に含まれることである。 $\mathbf{x} \in |K|$ とすると、ある単体に含まれるすべての点はいずれかの面 (その単体自身も含めて) の内部に含まれる (頂点は0次元単体の内部に含まれる) から、 \mathbf{x} は K のある単体の面 σ に含まれる。そのとき K はその面を含むから $\sigma \in K$ である。したがって \mathbf{x} は K の少なくとも一つの単体の内部に含まれる。 \mathbf{x} が K の二つの単体 σ と τ の内部に含まれると仮定してみよう。すると K は単体的複体であるから \mathbf{x} は σ と τ のある共通の面 $\sigma \cap \tau$ に含まれなければならない。しかし、 σ と τ は異なる単体であるからこの共通の面は σ 自身あるいは τ 自身ではない面でなければならないが、これは \mathbf{x} が σ と τ の内部に含まれるということと矛盾する。ゆえに、 \mathbf{x} をその内部に含む K の単体はただ一つであることが言える。

逆に、上の条件を満たす単体の組が単体的複体であることを示そう。 K はその単体のすべての面を含んでいるから示すべきは σ と τ が K の二つの単体であって共通部分が空集合ではないときに $\sigma \cap \tau$ が σ と τ の共通の面になっていることである。 $\mathbf{x} \in \sigma \cap \tau$ とすると、 \mathbf{x} は K のただ一つの単体 ω の内部に含まれている。一方 σ と τ の任意の点はそれらの単体のただ一つの面に含まれており、また σ と τ のすべての面は K に属している。したがって ω は σ と τ の共通の面であり、 ω の頂点は σ 、 τ 両方の頂点である。よって単体 σ と τ は共通の頂点を持ち、 $\sigma \cap \tau$ のすべての点はその共通の頂点が張る σ と τ の共通の面 ρ に属している。これは $\sigma \cap \tau = \rho$ を意味し、したがって $\sigma \cap \tau$ は σ と τ の共通の面である。 ☺

定義 2.7 (三角形分割 (triangulation)). ある位相空間 X とユークリッド空間における単体的複体 K の多面体 $|K|$ との間に同相写像 $h: |K| \rightarrow X$ があるとき、 (K, h) を X の三角形分割と呼ぶ。

単体的複体から作られる多面体はコンパクト空間であるから、ある位相空間が三角形分割可能ならばそれはコンパクト空間でなければならない。

補題 2.4. X をハウスドルフ空間、 K を単体的複体とし、 $h: |K| \rightarrow X$ を $|K|$ から X への全単射であるとする。 h の K の各単体への制限がその単体上で連続であれば $h: |K| \rightarrow X$ は同相写像であり、したがって (K, h) は X の三角形分割である。

証明. K の各単体は $|K|$ の閉部分集合であり、 K の単体の数は有限個である。したがって『位相数学の基礎』補題 1.12 により $h: |K| \rightarrow X$ は連続である。また K の多面体 $|K|$ はコンパクトな位相空間である。コンパクトな位相空間からハウスドルフ空間への連続な全単射は同相写像である（『位相数学の基礎』定理 1.38）から (K, h) は X の三角形分割となる。☺

2.2 単体写像

まず「単体写像」を定義する。

定義 2.8 (単体写像). ある単体的複体 K の頂点の集合 $\text{Vert}K$ からある単体的複体 L の頂点の集合 $\text{Vert}L$ への関数 s が次の条件を満たすとき K と L の間の「単体写像 (simplicial map)」であると言う。

K の頂点のある集合 $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q$ が K に含まれる q 次元単体を張るとき、 $s(\mathbf{v}_0), s(\mathbf{v}_1), \dots, s(\mathbf{v}_q)$ は L に含まれる q 次元単体を張る。

K から L への単体写像 $s: K \rightarrow L$ は多面体 $|K|$ から $|L|$ への連続写像 $s: |K| \rightarrow |L|$ を次のように自然に導く。

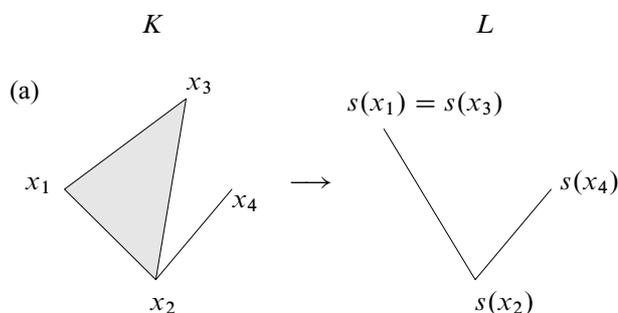
$$s\left(\sum_{j=0}^q t_j \mathbf{v}_j\right) = \sum_{j=0}^q t_j s(\mathbf{v}_j)$$

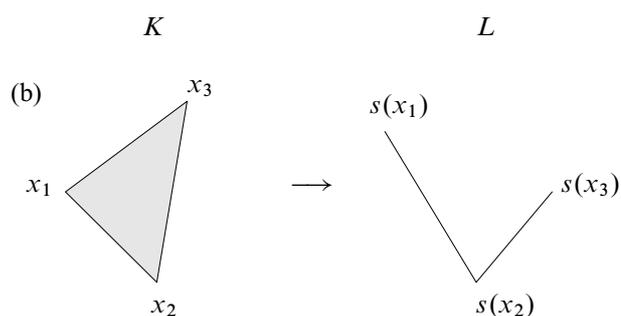
ただし $j = 0, 1, \dots, q$ について $0 \leq t_j \leq 1$ かつ $\sum_{j=0}^q t_j = 1$ であり、また $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q$ は K の単体を張る頂点である。この写像の連続性は『位相数学の基礎』補題 1.12 から導かれる（各単体の中でこの写像は連続）。この写像によって $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q$ が張る K の単体の (t_0, t_1, \dots, t_q) という座標を持つ点が、 $s(\mathbf{v}_0), s(\mathbf{v}_1), \dots, s(\mathbf{v}_q)$ が張る L の単体のやはり (t_0, t_1, \dots, t_q) という座標を持つ点に移される。したがって K の単体 σ の内部は L の単体 $s(\sigma)$ の内部に移される。 $s(\sigma)$ は σ の頂点が s によって移される点によって張られる単体である。

単体写像は、二つの単体的複体の頂点の間に関数と見ることも、一つの単体的複体から別の単体的複体へに関数と見ることも、あるいは二つの単体的複体の多面体の間に関数と見ることもできる。

なお単体写像において異なる頂点が同じ点に写像されてもかまわない、すなわちある \mathbf{v}_i と $\mathbf{v}_j (\mathbf{v}_i \neq \mathbf{v}_j)$ について $s(\mathbf{v}_i) = s(\mathbf{v}_j)$ となってもかまわない。したがって $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q$ によって張られる K の単体より、 $s(\mathbf{v}_0), s(\mathbf{v}_1), \dots, s(\mathbf{v}_q)$ によって張られる L の単体の方が次元が低いこともあり得る。

例 2.2. 次の図に示す写像 $s: K \rightarrow L$ について、(a) は単体写像であるが (b) は単体写像ではない。





(a) においては x_1, x_2, x_3 および x_2, x_4 が K の単体（それぞれ三角形と線分）を張り、 $s(x_1), s(x_3), s(x_2)$ および $s(x_2), s(x_4)$ が L の単体（ともに線分）を張っている。一方、(b) においては x_1, x_2, x_3 が K の単体（三角形）を張っているが、 L において $s(x_1), s(x_2), s(x_3)$ は単体を張っていない。

2.3 単体の重心分割

σ を \mathbb{R}^k における q 次元単体、その頂点を $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q$ とする。 σ の重心を次のように定義する。

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{q+1}(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \dots + \mathbf{v}_q)$$

0 次元単体（点）の重心はその点自身、1 次元単体（線分）の重心はその中点、2 次元単体（三角形）の重心はその三角形の重心（三角形の頂点と向かい合った辺の中点を結ぶ線分を 2:1 に内分する点）、などである。

σ と τ があるユークリッド空間の単体であって、 σ が τ の真の面になっている場合、 $\sigma < \tau$ と書くことにする。

ある単体 K_1 が次の条件を満たすとき K の分割 (subdivision) であると言う。

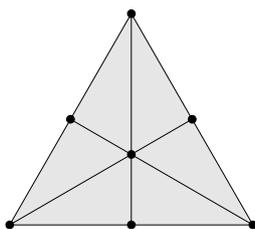
$|K_1| = |K|$ であって、 K_1 の単体はすべて K の単体でもある。

定義 2.9 (重心分割 (barycentric subdivision)). K を \mathbb{R}^k の単体的複体であるとする。 K' が次の条件を満たすとき K の一次重心分割 (first barycentric subdivision) であると言う。

K' は \mathbb{R}^k の単体の組であり、その単体の頂点は $\sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_r$ という関係を満たす K の単体の列 $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_r$ の重心 $\hat{\sigma}_0, \hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_r$ からなる。したがって K' の頂点の集合は K の単体のすべての重心からなる (K の頂点は K に含まれる 1 次元単体であり、その重心はその点自身であるから K' にも含まれる)。

たとえば K が一つの三角形 (2 次元単体) からなる場合、その一次重心分割とは K の面である三角形の各辺 (1 次元単体) の中点と三角形の重心をとり、その三角形の重心から各辺の中点を結ぶ 3 本の線分を引き、さらに三角形の重心から三角形の各頂点へ 3 本の線分を引いて作られたものであり、もとの三角形は 6 つの小さい三角形に分割されているとともに各辺も半分づつに分割されている。

例 2.3. 重心分割の例



次の補題によって示されるように、このようにして作られた K の重心分割自身も単体的複体である。

補題 2.5. K をあるユークリッド空間の単体的複体であり、 K' をその一次重心分割であるとする。そのとき K' 自身も単体的複体であり、 $|K'|$ と $|K|$ とは一致する。

証明. K に含まれる単体の数に関する数学的帰納法で証明する。 K が一つの単体からなる場合は 1 点のみであるから明らかに成り立つ。 $|K|$ が一つの三角形である場合には K は少なくともその三角形と三つの辺、三つの頂点を含む。 $|K|$ が線分である場合にも、 K はその線分と両端の点を含んでいる。ある単体的複体を取り、それよりも少ない数の単体を含む単体的複体について結論が成り立つと仮定する。

重心分割 K' の定義から K' の単体のあらゆる面は K' に含まれているから、ここで示すべきは K' からとった二つの単体は共通部分を持たないか、または共通部分がその二つの単体の共通の面になっていることである。

K と同じ次元を持つ K の単体 σ をとり、 $L = K \setminus \{\sigma\}$ (K から σ を取り除いたもの) とする。すると σ は K の単体の真の面ではない (K と同じ次元であるから) から L は K の部分複体となる。 L は K よりも少ない単体を含む。したがって帰納法の仮定から L' (L の重心分割) は単体的複体であり $|L'| = |L|$ が成り立つ。また K' の定義から K' は以下のものによって構成される。

- L' の単体
- σ の重心 $\hat{\sigma}$
- σ の真の面の重心を頂点とする L' の単体 ρ に σ の重心 $\hat{\sigma}$ を加えて得られた単体 $\hat{\sigma}\rho$

たとえば σ および K を一つの三角形とすると $L = K \setminus \{\sigma\}$ は三角形の辺と頂点からなり、 L' はその三角形の辺の中点で辺を分割したものである。 ρ はその三角形の辺の中点と頂点を結ぶ線分または頂点および辺の中点それ自身であり、 $\hat{\sigma}\rho$ はその線分と三角形の重心によって作られる三角形あるいは頂点 (または辺の中点) と重心を結ぶ線分である。

このようなタイプの単体の共通部分を考えると、 K' の任意の二つの単体は共通の面で交わっていることがわかる。 L' は単体的複体であるから L' の任意の二つの単体は共通の面で交わる。その頂点が σ の面の重心であるような L' の単体 ρ_1, ρ_2 をとると、 $\rho_1 \cap \rho_2$ は ρ_1 と ρ_2 の共通の面であり、また $\hat{\sigma}\rho_1 \cap \hat{\sigma}\rho_2 = \hat{\sigma}(\rho_1 \cap \rho_2)$ であるから、 $\hat{\sigma}\rho_1 \cap \hat{\sigma}\rho_2$ は $\hat{\sigma}\rho_1$ と $\hat{\sigma}\rho_2$ の共通の面である ($\hat{\sigma}\rho_1, \hat{\sigma}\rho_2$ はそれぞれ ρ_1 と $\hat{\sigma}$ によって作られる単体、 ρ_2 と $\hat{\sigma}$ によって作られる単体であり、それらの共通部分は ρ_1 と ρ_2 の共通部分である $\rho_1 \cap \rho_2$ と $\hat{\sigma}$ によって作られる単体に等しい)。また、 L' の任意の単体 τ は σ の重心とは交わっていないから、 $\hat{\sigma}\rho \cap \tau = \rho \cap \tau$ である。以上のことから K' は単体的複体である。

最後に $|K'| = |K|$ を確認しよう。 K' のすべての単体が K の単体に含まれるから $|K'| \subset |K|$ である。 \mathbf{x} を単体 σ の点とすると、 σ の面に属する点 \mathbf{y} と $t \in [0, 1]$ を用いて $\mathbf{x} = (1-t)\hat{\sigma} + t\mathbf{y}$ と書ける。そのとき、 $\mathbf{y} \in |L|$ であり、帰納法の仮定から $|L| = |L'|$ である。ゆえに \mathbf{y} は σ の真の面の重心を頂点とする L' の単体 ρ に属している。そうすると $\mathbf{x} \in \hat{\sigma}\rho$ となり、 $\mathbf{x} \in |K'|$ である。したがって $|K| \subset |K'|$ となるから求める $|K'| = |K|$ が得られる。☺

K の j 次重心分割 $K^{(j)}$ を、帰納的に $K^{(j-1)}$ の一次重心分割として定義する (K' の一次重心分割が $K^{(2)}$, $K^{(2)}$ の一次重心分割が $K^{(3)}$, などとして順に定義する)。 K が三角形の場合の例で言えば、各辺の中点と三角形の重心によって一度分割してできた小さい三角形について、さらに各辺の中点と三角形の重心をとって分割するのが二次重心分割、それを繰り返して j 次重心分割 $K^{(j)}$ が得られる。

補題 2.6. σ を q 次元単体, τ を σ の面とする。また $\hat{\sigma}, \hat{\tau}$ をそれぞれの重心とする。 σ のすべての 1 次元単体 (辺) が d 以下の長さ ($d > 0$) を持つならば

$$|\hat{\sigma} - \hat{\tau}| \leq \frac{qd}{q+1}$$

である。

証明. $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q$ を σ の頂点とする。 \mathbf{x}, \mathbf{y} を σ の点とすると, $\mathbf{y} = \sum_{j=0}^q t_j \mathbf{v}_j$ ($j = 0, 1, \dots, q$ について $0 \leq t_j \leq 1$ かつ $\sum_{j=0}^q t_j = 1$) と書ける。したがって

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| &= \left| \sum_{i=0}^q t_i (\mathbf{x} - \mathbf{v}_i) \right| \leq \sum_{i=0}^q t_i |\mathbf{x} - \mathbf{v}_i| \\ &\leq \max(|\mathbf{x} - \mathbf{v}_0|, |\mathbf{x} - \mathbf{v}_1|, \dots, |\mathbf{x} - \mathbf{v}_q|) \end{aligned}$$

この結果を $\mathbf{x} = \hat{\sigma}, \mathbf{y} = \hat{\tau}$ に適用すると

$$|\hat{\sigma} - \hat{\tau}| \leq \max(|\hat{\sigma} - \mathbf{v}_0|, |\hat{\sigma} - \mathbf{v}_1|, \dots, |\hat{\sigma} - \mathbf{v}_q|)$$

が得られる。一方、頂点 \mathbf{v}_i とは逆の方向にある σ の $q-1$ 次元の面の重心を \mathbf{z}_i とすると ($\mathbf{z}_i = \frac{1}{q} \sum_{j \neq i} \mathbf{v}_j$), $i = 0, 1, \dots, q$ について

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{q+1} \mathbf{v}_i + \frac{q}{q+1} \mathbf{z}_i$$

である。また $\mathbf{z}_i \in \sigma$ である。したがって $i = 0, 1, \dots, q$ について

$$|\hat{\sigma} - \mathbf{v}_i| = \frac{q}{q+1} |\mathbf{z}_i - \mathbf{v}_i| \leq \frac{qd}{q+1}$$

となる*7。したがって

$$|\hat{\sigma} - \hat{\tau}| \leq \max(|\hat{\sigma} - \mathbf{v}_0|, |\hat{\sigma} - \mathbf{v}_1|, \dots, |\hat{\sigma} - \mathbf{v}_q|) \leq \frac{qd}{q+1}$$

を得る。 ☺

K の辺 (1 次元単体) の内最も長いものの長さを $\mu(K)$ で表す。

補題 2.7. K が k 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^k の n 次元の単体的複体で、 K' がその一次重心分割であるとすると、

$$\mu(K') \leq \frac{n}{n+1} \mu(K)$$

が成り立つ。

*7

$$|\mathbf{z}_i - \mathbf{v}_i| = \left| \frac{1}{q} \sum_{j \neq i} (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \right| \leq \frac{1}{q} \sum_{j \neq i} |\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i|$$

より $|\mathbf{z}_i - \mathbf{v}_i| \leq d$ である。

証明. K' の 1 次元単体は $(\hat{\tau}, \hat{\sigma})$ の形に表すことができる。 σ は K の q 次元単体 ($q \leq n$)、 τ はその面である (K' は K の重心分割であるから、 K' の 1 次元単体は K に含まれるある単体 (q 次元単体) の重心とその面の重心とを結んだ線分である)。すると補題 2.6 より

$$|\hat{\tau} - \hat{\sigma}| \leq \frac{q}{q+1} \mu(K) \leq \frac{n}{n+1} \mu(K)$$

が得られる。

☺

この補題から $K^{(j)}$ を K の j 次重心分割とすると $\lim_{j \rightarrow +\infty} \mu(K^{(j)}) = 0$ であることがわかる。すなわち重心分割を繰り返して行くと単体的複体を構成する 1 次元単体の大きさは 0 に収束して行くのである。

2.4 単体近似定理

まず「単体近似」を定義する。

定義 2.10 (単体近似). 単体的複体 K と L によって作られる多面体を $|K|, |L|$ で表し、 f を $|K|$ から $|L|$ への連続関数とする。 K から L への単体写像 s およびそれから自然に導かれる連続写像 (やはり s で表す) が次の条件を満たすとき、単体写像 s は f の単体近似 (simplicial approximation) であると言う。

$|K|$ 上の各点 \mathbf{x} について $s(\mathbf{x})$ は $f(\mathbf{x})$ をその内部に含むただ一つの L の単体の要素である。

つまり、すべての \mathbf{x} について $s(\mathbf{x})$ と $f(\mathbf{x})$ とが L の同じ単体に含まれているということである。

K から L への単体写像 s が $|K|$ から $|L|$ への関数 f の単体近似であるとき、 s と f はホモトピックである。これは $|K| \times [0, 1]$ から $|L|$ への関数 $(1-t)f(\mathbf{x}) + ts(\mathbf{x})$ ($(\mathbf{x}, t) \in |K| \times [0, 1]$) が f と s の間のホモトピーになることからわかる。

次に「星状体」を定義する。

定義 2.11 (星状体 (star)). K を単体的複体、 $\mathbf{x} \in |K|$ とする。点 \mathbf{x} を含むすべての K の単体の内部の和集合を K における \mathbf{x} の星状体と呼び、 $\text{st}_K(\mathbf{x})$ と表す。

たとえば一つの三角形を 1 回重心分割した単体的複体を K とすると、その三角形の重心の星状体は三角形の内部であり、三角形の頂点の星状体は、その頂点自身、それを含む辺の内部 (逆の頂点は含まない)、およびその三角形の内部の和集合である。

星状体について次の補題を得る。

補題 2.8. K を単体的複体、 $\mathbf{x} \in |K|$ とする。そのとき星状体 $\text{st}_K(\mathbf{x})$ は $|K|$ において開集合であり、 $\mathbf{x} \in \text{st}_K(\mathbf{x})$ (\mathbf{x} は星状体に含まれる) である。

証明. 補題 2.3 により $|K|$ のすべての点は K のただ一つの単体の内部に属している。したがって $|K|$ における $\text{st}_K(\mathbf{x})$ の補集合 $|K| \setminus \text{st}_K(\mathbf{x})$ は \mathbf{x} を含まない K の単体の内部の和集合である (これには \mathbf{x} を含まない線分や \mathbf{x} 以外の頂点も含まれる)。一方、 K の単体が \mathbf{x} を含まなければその面も \mathbf{x} を含まない。さらに、ある単体のすべての面の内部の和集合はその単体自身に他ならない。したがって $|K| \setminus \text{st}_K(\mathbf{x})$ は \mathbf{x} を含まない K のすべての単体の和集合である。しかし、 K の各単体は $|K|$ の閉集合であるから $|K| \setminus \text{st}_K(\mathbf{x})$ は有限個の閉集合の和集合であり、それ自身 $|K|$ の閉集合である。よって $\text{st}_K(\mathbf{x})$ が $|K|$ の開集合であることが導かれる。また \mathbf{x} が少なくとも一つの K の単体の内部に属しているので $\mathbf{x} \in \text{st}_K(\mathbf{x})$ である。

☺

さらに次の補題を得る。

補題 2.9. 単体的複体 K, L の頂点の集合の間の関数 $s: \text{Vert}K \rightarrow \text{Vert}L$ は次の条件が満たされるとき、またそのときにのみ単体写像であり、かつある連続関数 $f: |K| \rightarrow |L|$ の単体近似である。

K のすべての頂点 \mathbf{v} について $f(\text{st}_K(\mathbf{v})) \subset \text{st}_L(s(\mathbf{v}))$ である。

証明. $s: K \rightarrow L$ を $f: |K| \rightarrow |L|$ の単体近似とし、 \mathbf{v} を K の頂点、 $\mathbf{x} \in \text{st}_K(\mathbf{v})$ であるとする。そのとき \mathbf{x} 、 $f(\mathbf{x})$ はそれぞれただ一つの単体 $\sigma \in K$ 、 $\tau \in L$ の内部に属している。さらに、 $\text{st}_K(\mathbf{v})$ の定義から \mathbf{v} は σ の頂点でなければならない。 s が f の単体近似であるから $s(\mathbf{x})$ は τ に属しており、したがって $s(\mathbf{x})$ は τ のある面の内部に属していなければならない。一方、 \mathbf{x} は σ の内部にあるので $s(\mathbf{x})$ は $s(\sigma)$ の内部に属していなければならない。したがって、 $s(\sigma)$ は τ の面であり、 $s(\mathbf{v})$ は τ の頂点である。よって $f(\mathbf{x}) \in \text{st}_L(s(\mathbf{v}))$ であり、 $s: K \rightarrow L$ が $f: |K| \rightarrow |L|$ の単体近似であるならば $f(\text{st}_K(\mathbf{v})) \subset \text{st}_L(s(\mathbf{v}))$ であることが言える。

逆に $s: \text{Vert}K \rightarrow \text{Vert}L$ がすべての K の頂点 \mathbf{v} について $f(\text{st}_K(\mathbf{v})) \subset \text{st}_L(s(\mathbf{v}))$ を満たすような関数であるとする。 $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q$ を頂点とする K のある単体の内部の点を \mathbf{x} とすると、 $j = 0, 1, 2, \dots, q$ に対して $\mathbf{x} \in \text{st}_K(\mathbf{v}_j)$ であるから $f(\mathbf{x}) \in \text{st}_L(s(\mathbf{v}_j))$ である。したがって各々の $s(\mathbf{v}_j)$ は $f(\mathbf{x})$ をその内部に含むただ一つの単体 $\tau \in L$ の頂点でなければならない。したがって $s(\mathbf{v}_0), s(\mathbf{v}_1), \dots, s(\mathbf{v}_q)$ は τ の面を張り、 $s(\mathbf{x}) \in \tau$ である。以上によって $s: \text{Vert}K \rightarrow \text{Vert}L$ は $f: |K| \rightarrow |L|$ の単体近似となる単体写像を表現していることが言えた。☺

この補題から次の系が得られる。

系 2.10. K, L, M を単体的複体とする。 $s: K \rightarrow L, t: L \rightarrow M$ がそれぞれ連続関数 $f: |K| \rightarrow |L|, g: |L| \rightarrow |M|$ の単体近似であれば、 $t \circ s: K \rightarrow M$ は $g \circ f: |K| \rightarrow |M|$ の単体近似である。

証明. s が f の単体近似であるから K の頂点 \mathbf{v} について

$$f(\text{st}_K(\mathbf{v})) \subset \text{st}_L(s(\mathbf{v}))$$

であり、また t が g の単体近似であるから L の頂点 $s(\mathbf{v})$ について

$$g(\text{st}_L(s(\mathbf{v}))) \subset \text{st}_M(t(s(\mathbf{v})))$$

をである。したがって

$$g(f(\text{st}_K(\mathbf{v}))) \subset g(\text{st}_L(s(\mathbf{v}))) \subset \text{st}_M(t(s(\mathbf{v})))$$

を得る。これは $t \circ s$ が $g \circ f$ の単体近似であることを意味する。☺

最後に次の定理を得る。

定理 2.11 (単体近似定理 (Simplicial Approximation Theorem)). K と L を単体的複体、 f を $|K|$ から $|L|$ への連続関数とする。そのとき、充分大きな j について f の単体近似となる $K^{(j)}$ から L への単体写像 s が存在する。

証明. L の頂点を \mathbf{w} とすると、補題 2.8 によって各 $\text{st}_L(\mathbf{w})$ は $|L|$ の開集合であり、 \mathbf{w} が L の任意の単体の頂点であるときその単体の内部は $\text{st}_L(\mathbf{w})$ に含まれるので、 L のすべての頂点 \mathbf{w} の星状体 $\text{st}_L(\mathbf{w})$ の組は $|L|$ の開被覆となる。関数 $f: |K| \rightarrow |L|$ は連続であるから、 \mathbf{w} の星状体の f による逆像 $f^{-1}(\text{st}_L(\mathbf{w}))$ の組は $|K|$ の開被覆となる ($|K|$ の各点は $|L|$ のある点に移され、その $|L|$ の点はいずれかの $\text{st}_L(\mathbf{w})$ に属している。したがって $|K|$ のすべての点はいずれかの $f^{-1}(\text{st}_L(\mathbf{w}))$ に属しており、また各 $f^{-1}(\text{st}_L(\mathbf{w}))$ は開集合である)。したがって Lebesgue の補題 (『位相数学の基礎』補題 1.48) により、直径が δ より小さい $|K|$ の各部

分集合についてその集合の点が全体として f によって L のある頂点 \mathbf{w} の $\text{st}_L(\mathbf{w})$ の中に移されるような実数 $\delta > 0$ が存在する (各部分集合がいずれかの $f^{-1}(\text{st}_L(\mathbf{w}))$ に含まれる)。

ここで補題 2.7 より

$$\mu(K^{(j)}) \leq \left(\frac{\dim K}{\dim K + 1} \right)^j \mu(K)$$

であるから, $j \rightarrow +\infty$ のとき K の j 次重心分割について $\mu(K^{(j)})$ は 0 に近づく。したがって $\mu(K^{(j)}) < \frac{1}{2}\delta$ となるように j を選ぶことができる。 \mathbf{v} を $K^{(j)}$ の頂点とすると, $\text{st}_{K^{(j)}}(\mathbf{v})$ の点は \mathbf{v} から $\frac{1}{2}\delta$ 以内の距離に位置しており, $\text{st}_{K^{(j)}}(\mathbf{v})$ の直径は高々 δ である。よって $K^{(j)}$ の各頂点 \mathbf{v} について L の頂点 $s(\mathbf{v})$ を $f(\text{st}_{K^{(j)}}(\mathbf{v})) \subset \text{st}_L(s(\mathbf{v}))$ となるように選ぶことができる。このようにして, $K^{(j)}$ の頂点から L の頂点への関数 $s: \text{Vert}K^{(j)} \rightarrow \text{Vert}L$ が得られる。補題 2.9 によりこれが求める f の単体近似である。 ☺

3 ホモロジー群

3.1 単体的複体の鎖群

K を単体的複体とし, 各正の整数 q について以下のように q 次元単体の形式的な和で表される要素 c からなる群を $C_q(K)$ で表す。

$$c = n_1 \langle \mathbf{v}_0^1, \mathbf{v}_1^1, \dots, \mathbf{v}_q^1 \rangle + n_2 \langle \mathbf{v}_0^2, \mathbf{v}_1^2, \dots, \mathbf{v}_q^2 \rangle + \dots + n_s \langle \mathbf{v}_0^s, \mathbf{v}_1^s, \dots, \mathbf{v}_q^s \rangle$$

ここで n_1, n_2, \dots, n_s は整数であり, $\mathbf{v}_0^r, \mathbf{v}_1^r, \dots, \mathbf{v}_q^r$ は $r = 1, 2, \dots, s$ について K に含まれる q 次元単体 $\langle \mathbf{v}_0^r, \mathbf{v}_1^r, \dots, \mathbf{v}_q^r \rangle$ を張る K の頂点である。それぞれの q 次元単体に適当に $+1$ または -1 の向きをつける。その際ある単体の表現において 2 つの頂点を入れ替えたときには向きが変わるものとする。このようにして向きがつけられた q 次元単体を有向 q 次元単体 (oriented q -simplex) と呼ぶ。

たとえば 2 次元単体 $\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ の向きを $+1$ とすれば, これを $\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle$ と表すと向きは -1 , さらに $\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1 \rangle$ と表せば $+1$ になる。3 つの頂点 $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ を反時計回りに並べれば, -1 の向きは時計回りに対応する (逆に決めてもよい)。1 次元単体の場合はそれぞれ右向き, 左向きに対応する (逆でもよい)。3 次元以上の場合には直感的には表せない。

c と別の要素

$$c' = n'_1 \langle \mathbf{v}_0^1, \mathbf{v}_1^1, \dots, \mathbf{v}_q^1 \rangle + n'_2 \langle \mathbf{v}_0^2, \mathbf{v}_1^2, \dots, \mathbf{v}_q^2 \rangle + \dots + n'_s \langle \mathbf{v}_0^s, \mathbf{v}_1^s, \dots, \mathbf{v}_q^s \rangle$$

の積 (この場合は和) は

$$c + c' = (n_1 + n'_1) \langle \mathbf{v}_0^1, \mathbf{v}_1^1, \dots, \mathbf{v}_q^1 \rangle + (n_2 + n'_2) \langle \mathbf{v}_0^2, \mathbf{v}_1^2, \dots, \mathbf{v}_q^2 \rangle + \dots + (n_s + n'_s) \langle \mathbf{v}_0^s, \mathbf{v}_1^s, \dots, \mathbf{v}_q^s \rangle$$

と定義されるが, これは明らかに交換法則を満たすから $C_q(K)$ はアーベル群である。 $C_q(K)$ を K の q 次鎖群 (q th chain group) と呼び, その要素を q 鎖 (q -chain) と呼ぶ。

例 3.1 (鎖群の例). K を 3 つの頂点 $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ からなる三角形と各辺, 各頂点によって構成される単体的複体とすると, その 0 鎖は

$$n_0 \langle \mathbf{v}_0 \rangle + n_1 \langle \mathbf{v}_1 \rangle + n_2 \langle \mathbf{v}_2 \rangle$$

と表される ($n_0, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$)。同様に 1 鎖は

$$m_0 \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1 \rangle + m_1 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle + m_2 \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_0 \rangle$$

と表され ($m_0, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$)^{*8}, 2 鎖は $n \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ と表される ($n \in \mathbb{Z}$)^{*9}。

鎖群の単位元は 0 で表す。これは単体を 1 つも含まない q 鎖である。また $q < 0$ および $q > \dim K$ については $C_q(K) = 0$ と定義する。 $\dim K$ は単体的複体 K の次元である。

3.2 境界準同型

K を単体的複体として K の鎖群の間の境界準同型 (boundary homomorphism) と呼ばれる準同型写像 $\partial_q : C_q(K) \rightarrow C_{q-1}(K)$ を定義する ($C_{q-1}(K)$ は $q-1$ 次元鎖群)。 K の有向 q 次元単体を σ とすると $\partial_q(\sigma)$ は σ の $q-1$ 次元面の形式的な和であり、各面には σ の向きから導かれる向きがつけられる。

q 次元単体 σ の頂点を $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q$ とする。各整数 $j (0 \leq j \leq q)$ について有向 $q-1$ 次元面

$$\langle \mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{v}_{j+1}, \dots, \mathbf{v}_q \rangle$$

を $\langle \mathbf{v}_0, \dots, \hat{\mathbf{v}}_j, \dots, \mathbf{v}_q \rangle$ と表す。これは単体 $\sigma = \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q \rangle$ から頂点 \mathbf{v}_j を取り除いたものである。特に

$$\langle \hat{\mathbf{v}}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q \rangle \equiv \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q \rangle$$

$$\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \hat{\mathbf{v}}_q \rangle \equiv \langle \mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_{q-1} \rangle$$

である。同様に j, k を 0 と q の間の 2 つの整数 ($j < k$) とすると

$$\langle \mathbf{v}_0, \dots, \hat{\mathbf{v}}_j, \dots, \hat{\mathbf{v}}_k, \dots, \mathbf{v}_q \rangle$$

は σ から 2 つの頂点 $\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k$ を取り除いた $q-2$ 次元面

$$\langle \mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{v}_{j+1}, \dots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_q \rangle$$

を表す。

各整数 q について境界準同型 $\partial_q : C_q(K) \rightarrow C_{q-1}(K)$ を定義する。まず $q \leq 0$ のときは $C_{q-1}(K) = 0$ であり、 $q > \dim K$ のときは $C_q(K) = 0$ であるから、 $q \leq 0$, $q > \dim K$ については $\partial_q = 0$ である。

K の q 次元単体を張る頂点 $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q$ について

$$\partial_q(\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q \rangle) = \sum_{j=0}^q (-1)^j \langle \mathbf{v}_0, \dots, \hat{\mathbf{v}}_j, \dots, \mathbf{v}_q \rangle$$

と定義する。これは $C_q(K)$ から $C_{q-1}(K)$ への準同型である。

補題 3.1. すべての整数 q について $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$ である。

*8 この鎖群の基は $\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1 \rangle, \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle, \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_0 \rangle$ である。

*9 この鎖群の基は $\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ である。

証明. $q < 2$ のときには $\partial_{q-1} = 0$ であるから明らかであるので $q \geq 2$ と仮定する。 K の q 次元単体を張る頂点を $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q$ とすると

$$\begin{aligned} \partial_{q-1}\partial_q(\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q \rangle) &= \sum_{j=0}^q (-1)^j \partial_{q-1}(\langle \mathbf{v}_0, \dots, \hat{\mathbf{v}}_j, \dots, \mathbf{v}_q \rangle) \\ &= \sum_{j=0}^q \sum_{k < j} (-1)^{j+k} \langle \mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{v}_{j+1}, \dots, \mathbf{v}_q \rangle \\ &\quad + \sum_{j=0}^q \sum_{k > j} (-1)^{j+k-1} \langle \mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{v}_{j+1}, \dots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_q \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

この式の2行目の $k < j$ の場合は \mathbf{v}_k を取り除いてできた $q-2$ 次元単体の符号は $(-1)^j$ に $(-1)^k$ をかけたものになり、一方3行目の $k > j$ の場合はすでに \mathbf{v}_j が取り除かれているので \mathbf{v}_k を取り除いてできた $q-2$ 次元単体の符号は $(-1)^j$ に $(-1)^{k-1}$ をかけたものになる。2行目と3行目を比べると j と k が入れ替わったもの同士が打ち消し合っている。

q 次元鎖群に対する $\partial_{q-1} \circ \partial_q$ の値は各単体に対する $\partial_{q-1} \circ \partial_q$ の値によって決まるので結論が得られる。 ☺

例 3.2. 単体 $\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ について確認してみよう。

$$\begin{aligned} \partial_1\partial_2(\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle) &= \partial_1(\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle - \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_2 \rangle + \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1 \rangle) \\ &= \langle \mathbf{v}_2 \rangle - \langle \mathbf{v}_1 \rangle - \langle \mathbf{v}_2 \rangle + \langle \mathbf{v}_0 \rangle + \langle \mathbf{v}_1 \rangle - \langle \mathbf{v}_0 \rangle = 0 \end{aligned}$$

この補題はあらゆる q 次元鎖群 $C_q(K)$ について、境界準同型を二度施せばゼロ (単位元) になることを意味する。

3.3 単体的複体のホモロジー群

K を単体的複体とすると、 q 鎖 z が $\partial_q z = 0$ を満たすとき q 輪体 (q -cycle) と呼ぶ。また q 鎖 b がある $q+1$ 鎖 c に対して $\partial_{q+1} c = b$ を満たすとき q 境界輪体 (q -boundary) と呼ぶ。 q 輪体の和は q 輪体であり、 q 境界輪体の和は q 境界輪体であるから*10, それぞれの全体は群をなし、 q 輪体の群は q 次元輪体群と呼ばれて $Z_q(K)$ と表され、 q 境界輪体の群は q 次元境界輪体群と呼ばれて $B_q(K)$ と表される。

q 次元輪体群 $Z_q(K)$ は境界準同型 $\partial_q : C_q(K) \rightarrow C_{q-1}(K)$ の核 (kernel) であり、一方 q 次元境界輪体群 $B_q(K)$ は境界準同型 $\partial_{q+1} : C_{q+1}(K) \rightarrow C_q(K)$ の像 (の集合) (image) である。補題 3.1 によって $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$ であるから $q+1$ 鎖 c' に対して $\partial_q \circ \partial_{q+1} c' = \partial_q b = 0$ が成り立つので b は q 輪体でもあり $B_q(K) \subset Z_q(K)$ である。これらはアーベル群 $C_q(K)$ の部分群であるので正規部分群であり、したがって商群 $H_q(K) = Z_q(K)/B_q(K)$ が定義される。これを単体的複体 K の q 次元ホモロジー群と呼ぶ。 $q < 0$ および $q > \dim K$ に対しては $C_q(K) = Z_q(K) = B_q(K) = 0$ であるから $H_q(K) = 0$ である。 $H_q(K)$ の要素は $Z_q(K)$ における $B_q(K)$ の剰余類の集合であり $z \in Z_q(K)$ として $[z] \in H_q(K)$ と表される。 $[z]$ はその差が $B_q(K)$ に属するような q 輪体の集合を代表し、 $[z]$ を z のホモロジー類と呼ぶ。 $z_1, z_2 \in Z_q(K)$ について $[z_1] + [z_2] = [z_1 + z_2]$ であり、ある $q+1$ 鎖 c について $z_1 - z_2 = b = \partial_{q+1} c$ のとき $[z_1] = [z_2]$ である*11。

*10 2つの輪体 z, z' について $\partial_q z = 0, \partial_q z' = 0$ ならば $\partial_q(z + z') = \partial_q z + \partial_q z' = 0$, また2つの境界輪体 b, b' について $\partial_{q+1} c = b, \partial_{q+1} c' = b'$ ならば $\partial_{q+1}(c + c') = b + b'$ である (c, c' は $q+1$ 鎖)。

*11 $z'_1 = z_1 + b_1, z'_2 = z_2 + b_2$ に対して $z'_1 + z'_2 = z_1 + z_2 + b_1 + b_2$ となるが、 $b_1 + b_2 \in B_q(K)$ である。

- 例 3.3 (ホモロジー群の例). (1). 最も単純な図形である 1 点 \mathbf{v}_0 からなる単体的複体 (0 次元単体のみからなる単体的複体) を K としてそのホモロジー群を求める。定義より $q > 0$ に対しては $C_q(K) = 0$ であるから $Z_q(K) = B_q(K) = 0$ であり $H_q(K) = 0$ である。 $q = 0$ の場合, $C_0(K)$ の要素 c はある整数を n として $c = n \langle \mathbf{v}_0 \rangle$ と表される ($\langle \mathbf{v}_0 \rangle$ は \mathbf{v}_0 だけからなる単体) が, n の値を適当に変えれば c と n が 1 対 1 に対応し, $C_0(K)$ は群としては整数の集合 \mathbb{Z} と同じ構造を持つ, すなわち $C_0(K)$ と \mathbb{Z} は同型である ($C_0(K) \cong \mathbb{Z}$)。また $\partial_0(n \langle \mathbf{v}_0 \rangle) = 0$ なので $Z_0(K) \cong \mathbb{Z}$ であり, $C_1(K) = 0$ より $B_0(K) = \partial_1(C_1(K)) = 0$ であるから $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ を得る^{*12}。
- (2). 3 点 $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ が構成する三角形 (2 次元単体) のすべての面 (辺と頂点) からなる単体的複体を K とする。三角形自体は含まない (この場合多面体 $|K|$ は三角形の 3 つの辺をつないだ図形である)。 K は次のように表される。

$$K = \{ \langle \mathbf{v}_0 \rangle, \langle \mathbf{v}_1 \rangle, \langle \mathbf{v}_2 \rangle, \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1 \rangle, \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle, \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_0 \rangle \}$$

まず K に 2 次元単体は存在しないので $q > 1$ に対しては $H_q(K) = 0$ である。1 次元鎖群 $C_1(K)$ の要素 c は $n_0, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ として

$$c = n_0 \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1 \rangle + n_1 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle + n_2 \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_0 \rangle$$

と表されるから

$$\begin{aligned} \partial_1(c) &= n_0 \partial_1(\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1 \rangle) + n_1 \partial_1(\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle) + n_2 \partial_1(\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_0 \rangle) \\ &= n_0(\langle \mathbf{v}_1 \rangle - \langle \mathbf{v}_0 \rangle) + n_1(\langle \mathbf{v}_2 \rangle - \langle \mathbf{v}_1 \rangle) + n_2(\langle \mathbf{v}_0 \rangle - \langle \mathbf{v}_2 \rangle) \\ &= (n_2 - n_0) \langle \mathbf{v}_0 \rangle + (n_0 - n_1) \langle \mathbf{v}_1 \rangle + (n_1 - n_2) \langle \mathbf{v}_2 \rangle \end{aligned}$$

となり, $\partial_1(c) = 0$ とおくと $n_2 - n_0 = n_0 - n_1 = n_1 - n_2 = 0$ より $n_0 = n_1 = n_2$ を得る ($\langle \mathbf{v}_0 \rangle$ と $\langle \mathbf{v}_1 \rangle$ などが打ち消し合うことはない)。したがって $Z_1(K)$ の要素は整数と同じだけあるので $Z_1(K) \cong \mathbb{Z}$ である^{*13}。一方, K に 2 次元単体は存在しないので $B_1(K) = 0$ であるから $H_1(K) \cong \mathbb{Z}$ を得る。

この $\partial_1(c)$ の式から $\langle \mathbf{v}_0 \rangle, \langle \mathbf{v}_1 \rangle, \langle \mathbf{v}_2 \rangle$ の係数の和がゼロに等しい ($(n_2 - n_0) + (n_0 - n_1) + (n_1 - n_2) = 0$) ことがわかる。これより

$$B_0(K) = \{ m_0 \langle \mathbf{v}_0 \rangle + m_1 \langle \mathbf{v}_1 \rangle + m_2 \langle \mathbf{v}_2 \rangle : m_0 + m_1 + m_2 = 0 \}$$

と表せる。これをもとに $H_0(K)$ を考える。 $C_0(K)$ の要素 d は $m_0, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ として

$$d = m_0 \langle \mathbf{v}_0 \rangle + m_1 \langle \mathbf{v}_1 \rangle + m_2 \langle \mathbf{v}_2 \rangle$$

と書ける。これに対して $\varepsilon(d) = m_0 + m_1 + m_2$ とおくと各 d が 1 つの整数に対応するような準同型 $\varepsilon: C_0(K) \rightarrow \mathbb{Z}$ が得られ, それは全射 (すべての整数に対応する) である。また $\ker \varepsilon$ は 0 に対応する d の集合であるから $m_0 + m_1 + m_2 = 0$ を満たす d からなるが, これは $B_0(K)$ に等しい。さらにすべての d について $\partial_0(d) = 0$ なので $C_0(K) = Z_0(K)$ であるから, 準同型定理 (定理 1.18) により $H_0(K) = Z_0(K)/B_0(K) (= C_0(K)/\ker \varepsilon) \cong \mathbb{Z} (= \text{image } \varepsilon)$ を得る。

以上ですべての q について $H_q(K)$ が求められた。

^{*12} $B_0(K) = 0$ であるから商群 $H_0(K) = Z_0(K)/B_0(K)$ において, 異なる $Z_0(K)$ の要素はすべて異なる $H_0(K)$ の要素となる。

^{*13} このとき $\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1 \rangle + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle + \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_0 \rangle$ が $Z_1(K)$ の生成元 (基) である。

(3). 3点 $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ が構成する三角形とそのすべての面からなる単体的複体を K とする。

$$K = \{ \langle \mathbf{v}_0 \rangle, \langle \mathbf{v}_1 \rangle, \langle \mathbf{v}_2 \rangle, \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1 \rangle, \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle, \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_0 \rangle, \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \}$$

と表される。 $H_0(K)$ は上の例と同じく $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ である。また $q > 2$ については $H_q(K) = 0$ である。まず $H_1(K)$ を考える。 $C_1(K), Z_1(K)$ は上の例と同じであるが $B_1(K)$ が異なる。 $C_2(K)$ の要素を c とすると

$$c = n \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$$

となり、これから

$$\partial_2(c) = n(\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1 \rangle + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle + \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_0 \rangle)$$

が得られ、これは \mathbb{Z} に同型であるから $B_1(K) \cong \mathbb{Z}$ となる。 $Z_1(K) \cong \mathbb{Z}$ であったので $H_1(K) = Z_1(K)/B_1(K) = 0$ である*¹⁴。

次に $H_2(K)$ を考える。上の $\partial_2(c)$ の式から $\partial_2(c) = 0$ となるのは $n = 0$ の場合だけであることがわかる。したがって $Z_2(K) = 0$ である。一方、3次元単体は存在しないので $B_2(K) = 0$ であり $H_2(K) = 0$ を得る。

この例をもとに「輪体」や「境界輪体」の意味を考えてみよう。この例の K の1次元鎖群の要素の内

$$c = n(\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1 \rangle + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle + \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_0 \rangle)$$

と表されるものは三角形の頂点を $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ の順に辺で結んで \mathbf{v}_0 に戻ってくる閉じた経路、すなわち輪になっている。これが輪体である。実際、上記の c に対して

$$\partial_1(c) = n(\langle \mathbf{v}_1 \rangle - \langle \mathbf{v}_0 \rangle + \langle \mathbf{v}_2 \rangle - \langle \mathbf{v}_1 \rangle + \langle \mathbf{v}_2 \rangle - \langle \mathbf{v}_0 \rangle) = 0$$

となり、 n がどのような整数であってもこのような c は輪体であるので $Z_1(K) \cong \mathbb{Z}$ である。それに対して単に三本の線分 $\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1 \rangle, \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle, \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$ を結んで作った単体的複体については1次元鎖群の要素

$$c = n_0 \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1 \rangle + n_1 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle + n_2 \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$$

について n_0, n_1, n_2 のすべてを0にしなければ

$$\partial_1(c) = n_0(\langle \mathbf{v}_1 \rangle - \langle \mathbf{v}_0 \rangle) + n_1(\langle \mathbf{v}_2 \rangle - \langle \mathbf{v}_1 \rangle) + n_2(\langle \mathbf{v}_3 \rangle - \langle \mathbf{v}_2 \rangle)$$

は0とはならず輪体群は単位元のみである。

この例の K に含まれる2次元の単体は三角形そのものだけであり、上で述べたように2次元鎖群の要素 c は $c = n \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ と表される。それに対して $\partial_2(c) = n(\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1 \rangle + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle + \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_0 \rangle)$ は $\partial_1 \partial_2(c) = 0$ によって輪体となるが、この $\partial_2(c)$ は2次元単体(三角形)の境界を構成している。1次元が高い単体の境界でそれ自身が輪体になっているものが境界輪体である。

3.4 単体写像と誘導準同型

単体的複体 K と L の間の単体写像 $\varphi: K \rightarrow L$ によって2つの q 次元鎖群 $C_q(K)$ から $C_q(L)$ への準同型 $\varphi_q: C_q(K) \rightarrow C_q(L)$ が導かれる。 K の q 次元単体を張る頂点を $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q$ とすると、ある単体 $\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q \rangle$ に対する φ_q の値は次のように表される。

$$\varphi_q(\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q \rangle) = \langle \varphi(\mathbf{v}_0), \varphi(\mathbf{v}_1), \dots, \varphi(\mathbf{v}_q) \rangle$$

*¹⁴ $Z_1(K)$ 全体が1つの剰余類となり商群の要素は1つだけである。

これは K の鎖群 $C_q(K)$ に自然に拡張される。もし $\varphi(\mathbf{v}_0), \varphi(\mathbf{v}_1), \dots, \varphi(\mathbf{v}_q)$ が同一の頂点を含んでいれば $\varphi_q = 0$ と定義する。

この φ_q について次の結果が得られる。

補題 3.2. 上で定義された φ_q について、各整数 q に対して $\varphi_{q-1} \partial_q = \partial_q \varphi_q$ である。

証明. ある単体 $\sigma = \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q \rangle$ について $\varphi_{q-1} \partial_q(\sigma) = \partial_q \varphi_q(\sigma)$ を示せばすべての q 鎖に拡張できる。次の3つのケースに分けて考える。

(1). $\dim \sigma = \varphi(\sigma)$ の場合 ($\varphi(\sigma)$ は φ によって σ の頂点から移された頂点が張る単体である)

$$\begin{aligned} \varphi_{q-1} \partial_q(\sigma) &= \varphi_{q-1} \left(\sum_{j=0}^q (-1)^j \langle \mathbf{v}_0, \dots, \hat{\mathbf{v}}_j, \dots, \mathbf{v}_q \rangle \right) \\ &= \sum_{j=0}^q (-1)^j \varphi_{q-1}(\langle \mathbf{v}_0, \dots, \hat{\mathbf{v}}_j, \dots, \mathbf{v}_q \rangle) \\ &= \sum_{j=0}^q (-1)^j \langle \varphi(\mathbf{v}_0), \dots, \varphi(\hat{\mathbf{v}}_j), \dots, \varphi(\mathbf{v}_q) \rangle \\ &= \partial_q \langle \varphi(\mathbf{v}_0), \varphi(\mathbf{v}_1), \dots, \varphi(\mathbf{v}_q) \rangle = \partial_q(\varphi_q(\sigma)) \end{aligned}$$

(2). $\dim \sigma - 1 = \varphi(\sigma)$ の場合

この場合は $\varphi(\mathbf{v}_0), \varphi(\mathbf{v}_1), \dots, \varphi(\mathbf{v}_q)$ の中に2つだけ同じものがある。それらを $\varphi(\mathbf{v}_i), \varphi(\mathbf{v}_k) (i < k)$ とする。そのとき

$$\begin{aligned} \varphi_{q-1} \partial_q(\sigma) &= \sum_{j=0}^q (-1)^j \varphi_{q-1}(\langle \mathbf{v}_0, \dots, \hat{\mathbf{v}}_j, \dots, \mathbf{v}_q \rangle) \\ &= (-1)^i \langle \varphi(\mathbf{v}_0), \dots, \varphi(\hat{\mathbf{v}}_i), \dots, \varphi(\mathbf{v}_q) \rangle + (-1)^k \langle \varphi(\mathbf{v}_0), \dots, \varphi(\hat{\mathbf{v}}_k), \dots, \varphi(\mathbf{v}_q) \rangle \end{aligned}$$

となる ($\varphi(\mathbf{v}_i), \varphi(\mathbf{v}_k)$ がともに含まれていれば $\varphi_{q-1} = 0$ である)。 $\varphi(\mathbf{v}_i) = \varphi(\mathbf{v}_k)$ であるから単体としては $\langle \varphi(\mathbf{v}_0), \dots, \varphi(\hat{\mathbf{v}}_i), \dots, \varphi(\mathbf{v}_q) \rangle$ と $\langle \varphi(\mathbf{v}_0), \dots, \varphi(\hat{\mathbf{v}}_k), \dots, \varphi(\mathbf{v}_q) \rangle$ は同一であるが、向きを考えると $C_{q-1}(K)$ の要素としては

$$\langle \varphi(\mathbf{v}_0), \dots, \varphi(\hat{\mathbf{v}}_i), \dots, \varphi(\mathbf{v}_q) \rangle = (-1)^{k-i-1} \langle \varphi(\mathbf{v}_0), \dots, \varphi(\hat{\mathbf{v}}_k), \dots, \varphi(\mathbf{v}_q) \rangle$$

である*15。したがって

$$\varphi_{q-1} \partial_q(\sigma) = 0$$

となる。一方定義から $\varphi_q(\sigma) = 0$ であるから $\varphi_{q-1} \partial_q = \partial_q \varphi_q$ が得られる。

(3). $\varphi(\sigma) \leq \dim \sigma - 2$ の場合

この場合は $\varphi(\mathbf{v}_0), \dots, \varphi(\hat{\mathbf{v}}_j), \dots, \varphi(\mathbf{v}_q)$ の中にも同じものがあるので定義によって $\varphi_q = \varphi_{q-1} = 0$ であるから $\varphi_{q-1} \partial_q = \partial_q \varphi_q (= 0)$ が得られる。

☺

*15 i と k が隣り合っていれば、すなわち $k - i = 1$ であればこれらは同じものになる。間に1つ (たとえば l を) はさんで2つ離れていれば一度の入れ替えで同じものになるので符号が逆になる。同様にして $k - i$ が奇数なら同じ符号、偶数なら逆の符号になる。

補題 3.3. すべての整数 q について $\varphi_q(Z_q(K)) \subset Z_q(L)$ および $\varphi_q(B_q(K)) \subset B_q(L)$ である。

証明. (1). $\varphi_q(Z_q(K))$ の要素は

$$z = \varphi_q(z') \quad (z' \in Z_q(K))$$

と表される。 $z \in Z_q(L)$ を示すには $\partial_q(z) = 0$ を示せばよい。

$$\partial_q(z) = \partial_q(\varphi_q(z')) = \varphi_{q-1}(\partial_q(z')) = 0 \quad (\partial_q(z') = 0 \text{ と補題 3.2 より})$$

(2). $\varphi_q(B_q(K))$ の要素は

$$b = \varphi_q(b') \quad (b' \in B_q(K))$$

と表される。 $b' = \partial_{q+1}(c)$ となる $c \in C_{q+1}(K)$ があるから

$$b = \varphi_q(b') = \varphi_q(\partial_{q+1}(c)) = \partial_{q+1}(\varphi_{q+1}(c)) \quad (\text{補題 3.2 より})$$

したがって $b \in B_q(L)$ である。

☺

この補題によって単体写像 $\varphi: K \rightarrow L$ からホモロジー群の準同型 $\varphi_*: H_q(K) \rightarrow H_q(L)$ が導かれることがわかる。これを誘導準同型と呼ぶ。 $z, z' \in Z_q(K)$ が同じホモロジー類 $[z] \in H_q(K)$ に属しているならば、 $z - z' \in B_q(K)$ であるから、補題 3.3 より $\varphi_q(z), \varphi_q(z') \in Z_q(L)$ であり、また $\varphi_q(z - z') = \varphi_q(z) - \varphi_q(z') \in B_q(L)$ であるから $\varphi_q(z)$ と $\varphi_q(z')$ は同じホモロジー類に属する (すなわち $[\varphi_q(z)] = [\varphi_q(z')]$)。

また次の結果も容易に示される。

補題 3.4. K, L, M を単体的複体、 $\varphi: K \rightarrow L, \psi: L \rightarrow M$ を単体写像とするとホモロジー群の誘導準同型 φ_*, ψ_* は $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$ を満たす。

証明. $\psi \circ \varphi$ は K から M への単体写像であり、それから $C_q(K)$ から $C_q(M)$ への準同型 $(\psi \circ \varphi)_q$ が導かれる。これは $\psi_q \circ \varphi_q$ に等しい。したがって $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$ が得られる。☺

3.5 位相空間の連結性

まず位相空間の連結性を定義する*16。

定義 3.1 (連結). 位相空間 X において開集合でもあり閉集合でもある部分集合が X 自身と空集合のみであるとき X は連結 (connected) であると言う。

補題 3.5. 位相空間 X は次の条件を満たすとき、またそのときのみ連結である。

X の空でない開集合 U, V によって $X = U \cup V$ と表されるとき、 $U \cap V \neq \emptyset$ である。

言い換えれば共通部分を持たない2つの開集合 U, V によって $X = U \cup V$ と表されるならば X は連結ではない。そのとき U, V は互いに相手の補集合であるから X の開集合かつ閉集合となり、「 X は共通部分を持たない2つの閉集合 U, V によって $X = U \cup V$ と表される」とも言える。

*16 本節の内容は森田 (1981) による。

証明. U が開集合かつ閉集合であるような X の空でない部分集合であって $V = X \setminus U$ であるとする、 U, V はともに開集合であり $U \cup V = X$ かつ $U \cap V = \emptyset$ である。逆に U, V が $U \cup V = X$ および $U \cap V = \emptyset$ を満たす X の部分開集合であるとする、 $U = X \setminus V$ であり、 U は開集合かつ閉集合 (V が開集合であるから) である。したがって $U \cup V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ を満たすような空でない開集合 U, V が存在しないとき、またそのときにのみ X は連結である。☺

整数の集合 \mathbb{Z} が 1 次元ユークリッド空間 (実数の集合) \mathbb{R} の通常の位相 (ユークリッドの距離から得られる位相) から導かれる相対位相による位相空間であるとする。そのときすべての $n \in \mathbb{Z}$ について

$$\{n\} = \mathbb{Z} \cap \{t \in \mathbb{R} : |t - n| < \frac{1}{2}\}$$

であるから $\{n\}$ (n だけからなる集合) は \mathbb{Z} の開集合である。したがって \mathbb{Z} のあらゆる部分集合は開集合となり、位相空間 X から \mathbb{Z} への関数 $f : X \rightarrow \mathbb{Z}$ は \mathbb{Z} の任意の部分集合 V について $f^{-1}(V)$ が開集合であるとき、またそのときにのみ連続である。この事実を使って以下のように位相空間の連結性を特徴づけることができる。

補題 3.6. 位相空間 X は任意の X から \mathbb{Z} への連続な関数 $f : X \rightarrow \mathbb{Z}$ が一定 (constant) であるとき (関数の値がまったく変わらない)、またそのときにのみ連結である。

証明. X が連結であると仮定する。連続関数 $f : X \rightarrow \mathbb{Z}$ について $n \in f(X)$ を選び

$$U = \{x \in X : f(x) = n\}, V = \{x \in X : f(x) \neq n\}$$

とする。そのとき U, V はそれぞれ \mathbb{Z} の開部分集合 $\{n\}, \mathbb{Z} \setminus \{n\}$ の逆像であるから、 U, V は開集合である (f が連続であるから)。さらに $U \cap V = \emptyset$ かつ $X = U \cup V$ であるから、 $V = X \setminus U$ であり U は開集合かつ閉集合となる。また、 $n \in f(X)$ と仮定したので U は空集合ではない。したがって X の連結性から $U = X$ となり $f : X \rightarrow \mathbb{Z}$ は常に値が n に等しい関数となる。

逆にすべての連続な関数 $f : X \rightarrow \mathbb{Z}$ が一定の値をとると仮定してみよう。 S を開集合かつ閉集合であるような X の部分集合として関数 $f : X \rightarrow \mathbb{Z}$ を次のように定義する。

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in S \text{ のとき} \\ 0 & x \notin S \text{ のとき} \end{cases}$$

すると \mathbb{Z} の任意の部分集合の f による逆像は空集合 (\emptyset) か ($\mathbb{Z} \setminus \{0\} \cup \{1\}$ について)、 S か ($\{1\}$ について)、 $X \setminus S$ か ($\{0\}$ について)、あるいは $X \setminus (\{0\} \cup \{1\})$ について) であるが、これらはすべて開集合である。したがってこの関数 f は連続となる。そのとき f は一定であるから $S = \emptyset$ または $S = X$ でなければならない。よって X は連結である。☺

補題 3.7. 开区間 $(0, 1)$ は連結である。

証明. $(0, 1)$ が共通部分を持たず、空でない 2 つの閉集合 A_1, A_2 の和集合として表されると仮定する。 A_1, A_2 からそれぞれ 1 つの点 a_1, a_2 をとれば $a_1 \neq a_2$ であるから $a_1 < a_2$ と仮定することができる。そのとき

$$B = A_1 \cap (0, a_2)$$

とおけば $a_1 \in B$ であるから $B \neq \emptyset$ である。また、 a_2 は B の上界となるので B は上に有界であり上限 $\sup B = c$ が存在して $c \leq a_2$ が成り立つ。上限の性質によって、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $c - \varepsilon < a'_1 \leq c$ となる B の要素 (これは A_1 の要素でもある) a'_1 が存在するから、

$$(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap A_1 \neq \emptyset$$

であり、したがって $c \in \bar{A}_1$ である。 A_1 は閉集合であるから $c \in A_1$ となり、 $c < a_2$ が得られる。一方、 $c < x \leq a_2$ を満たす実数 x はすべて A_2 に属するから任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap A_2 \neq \emptyset$$

が成り立つ。したがって $c \in \bar{A}_2$ であり、 A_2 も閉集合であるから $c \in A_2$ となり $c \in A_1 \cap A_2$ が得られるが、これは矛盾である。☺

この結論は $0, 1$ 以外のあらゆる実数についても成り立つ。

A を X の部分集合とすると、部分集合の相対位相によって次の条件が成り立つとき、またそのときにのみ A が連結であることがわかる。

U, V が $A \cap U \neq \emptyset, A \cap V \neq \emptyset$ と $A \subset U \cup V$ を満たすような X の開集合であるならば $A \cap U \cap V \neq \emptyset$ である。

補題 3.8. X が位相空間で A はその連結な部分集合であるとする、 A の閉包 \bar{A} は連結である。

証明. 閉包の定義から、 $A \subset F$ であるようなすべての X の閉部分集合 F について $\bar{A} \subset F$ が成り立つ。 F がある開集合 U の補集合であることから $A \cap U = \emptyset$ であるようなあらゆる開集合 U について $\bar{A} \cap U = \emptyset$ であることがわかる*17。したがって U が X の開集合で $\bar{A} \cap U \neq \emptyset$ ならば $A \cap U \neq \emptyset$ でなければならない。

U, V を $\bar{A} \cap U \neq \emptyset, \bar{A} \cap V \neq \emptyset$ および $\bar{A} \subset U \cup V$ を満たすような X の開集合であるとする、 $A \cap U \neq \emptyset, A \cap V \neq \emptyset$ かつ $A \subset U \cup V$ である。一方 A は連結であるから $A \cap U \cap V \neq \emptyset$ であり、したがって $\bar{A} \cap U \cap V \neq \emptyset$ であるので \bar{A} は連結である。☺

補題 3.7, 3.8 より閉区間 $[0, 1]$ も連結であることがわかる。

以上から次の結果を得る。

補題 3.9. X を位相空間とし、各 $x \in X$ について S_x を x を含む X のすべての連結な部分集合の和集合とすると (各集合が x を含んでいる) 以下の結論が成り立つ。

- (1). S_x は連結である。
- (2). S_x は閉集合である。
- (3). $x, y \in X$ とすると $S_x = S_y$ であるか、さもなければ $S_x \cap S_y = \emptyset$ である。

証明. $f: S_x \rightarrow \mathbb{Z}$ を、ある $x \in X$ に対する S_x 上で定義された連続な整数値関数とし、 y を任意の S_x の点とする。 S_x の定義から x と y の両方を含む連結な集合 A が存在する。 A は連結だから f は A において一定であるので、 $f(x) = f(y)$ である。 y は任意であるから f は S_x 上で一定であり、したがって S_x は連結であるから (1) が示された。さらに補題 3.8 によって S_x の閉包 \bar{S}_x も連結であり、 S_x の定義から $\bar{S}_x \subset S_x$ であるから S_x は閉集合である ($\bar{S}_x = S_x$)。以上で (2) が示された。

次に x, y が $S_x \cap S_y \neq \emptyset$ であるような X の2点であるとする。 $f: S_x \cup S_y \rightarrow \mathbb{Z}$ を $S_x \cup S_y$ で定義された整数値関数とすると f は S_x および S_y のそれぞれにおいて一定である。さらに $S_x \cap S_y \neq \emptyset$ であるから S_x における f の値と S_y における値とは一致しなければならない。したがって f は $S_x \cup S_y$ において一定となり $S_x \cup S_y$ は x, y の両方を含む連結な集合となるから、 S_x, S_y の定義によって $S_x \cup S_y \subset S_x$ かつ $S_x \cup S_y \subset S_y$ となる。したがって $S_x = S_y$ である。☺

*17 $A \cap U = \emptyset$ ならば $F = X \setminus U$ として $A \subset F$ であり、したがって $\bar{A} \cap U = \emptyset$ である。

任意の位相空間 X について上の補題のように定義された X の連結な部分集合 S_x を X の連結成分と呼ぶ。補題 3.9 の (3) より位相空間 X はその互いに共通部分を持たない連結成分の和集合として表すことができる。

例 3.4 (連結成分の例). (1). 集合 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ の連結成分は

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \text{ と } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$$

である。

(2). 集合 $\{t \in \mathbb{R} : \text{ある整数 } n \text{ について } |t - n| < \frac{1}{2}\}$ の連結成分は $J_n = (n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$ で表される集合 $J_n (n \in \mathbb{Z})$ である。

連結性に関連した概念に弧状連結性がある。

定義 3.2 (弧状連結性). x_0, x_1 を位相空間 X の点とする。 x_0 から x_1 への道 (path) を $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1$ を満たす連続関数 $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ として定義する。位相空間 X にその任意の 2 点を結ぶ道が存在するとき弧状連結 (path-connected) であると言う。

補題 3.10. 弧状連結な位相空間は連結である。

証明. X を弧状連結な位相空間とし、 $f : X \rightarrow \mathbb{Z}$ を連続な整数値関数とする。 x_0, x_1 を X の任意の 2 点とすれば $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1$ を満たす連続関数 $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ が存在する。そのとき $f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{Z}$ は $[0, 1]$ 上で定義された連続な整数値関数である (連続関数の合成関数であるから)。ここで $[0, 1]$ は連結であるから (補題 3.7, 3.8) $f \circ \gamma$ は一定の値をとる (補題 3.6)。したがって $f(x_0) = f(x_1)$ であり、 X 上のすべての連続な整数値関数は一定である。よって補題 3.6 により X は連結である。 \odot

次に積空間の連結性について考えてみよう。その前に準備としていくつかの事実を示す。

位相空間 X の部分集合 B, C が

$$\bar{B} \cap C = \emptyset, B \cap \bar{C} = \emptyset$$

を満たすとき離れた集合であると言う ($B = \emptyset$ あるいは $C = \emptyset$ であってもよい)。

補題 3.11. A を位相空間 X の部分集合とすると、次の条件は同値である。

- (a) A は連結である。
- (b) B, C を $A = B \cup C$ を満たす X の離れた集合とすれば $B = \emptyset$ か、または $C = \emptyset$ である。
- (c) G, H を $A \subset G \cup H$ を満たす X の離れた集合とすれば $A \subset G$ か、または $A \subset H$ である。

証明. (1). (a) \Rightarrow (b)

B, C は (b) の仮定を満たすとする。 B の A における (相対位相の意味での) 閉包は $\bar{B} \cap A$ に等しい。これより

$$\bar{B} \cap A = \bar{B} \cap (B \cup C) = (\bar{B} \cap B) \cup (\bar{B} \cap C) = B$$

である ($\bar{B} \cap C = \emptyset$) から B は A において閉集合である。同様に C も A の閉集合となる。したがって B, C は A において開集合かつ閉集合である。 A が連結であるから $B = \emptyset$ または $C = \emptyset$ である。

(2). (b) \Rightarrow (c)

G, H は (c) の仮定を満たすとする。 $B = A \cap G, C = A \cap H$ とおくと B, C は離れた集合で、かつ $B \cup C = A$ を満たす。したがって (b) が成り立てば $B = \emptyset$ または $C = \emptyset$ である。 $B = \emptyset$ ならば $A \subset H$ であり、 $C = \emptyset$ ならば $A \subset G$ である。

(3). (c) \Rightarrow (a)

G, H は A の閉集合で $A = G \cup H, G \cap H = \emptyset$ を満たすとする。このとき

$$\bar{G} \cap H = \bar{G} \cap (A \cap H) = (\bar{G} \cap A) \cap H$$

であるが、 $(\bar{G} \cap A) \cap H$ は G の A における閉包と H の共通部分に等しい。 G が閉集合であるからそれは $G \cap H$ に等しく、仮定より空集合である。同様に $G \cap \bar{H} = \emptyset$ となるから、 G, H は離れた集合である。したがって (c) が成り立てば $A \subset G$ か、または $A \subset H$ である。 $A \subset G$ ならば $H = \emptyset$ 、 $A \subset H$ ならば $G = \emptyset$ となり、 A は連結である。

☺

補題 3.12. 位相空間 X において、連結な集合からなる X の部分集合の族 (組) $M = \{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ (λ は番号と考えればよい) に対し

$$\lambda \in \Lambda \text{ ならば } M_\lambda \cap M_\mu \neq \emptyset$$

となる $\mu \in \Lambda$ が存在するとき、 $M = \cup\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ は連結である。

すなわち、すべての連結集合と空でない共通部分を持つような集合が存在すれば連結集合の和集合は連結である。

証明. G, H は離れた X の部分集合で、 $M \subset (G \cup H)$ を満たすものとする。 M_λ は連結集合で $M_\lambda \subset M \subset (G \cup H)$ であるから補題 3.11 により $M_\lambda \subset G, M_\lambda \subset H$ のいずれかが成り立つ。同様に M_μ についても $M_\mu \subset G, M_\mu \subset H$ のいずれかが成り立つ。 $M_\mu \subset G$ ($M_\mu \cap H = \emptyset$) と仮定してみよう。そのとき任意の $\lambda \in \Lambda$ について $M_\lambda \cap M_\mu \neq \emptyset$ であるから $M_\lambda \subset H$ とはならない。すなわち $M_\lambda \subset G$ である。したがって $M \subset G$ となり、補題 3.11 により M は連結である。☺

系 3.13. 位相空間 X の任意の 2 点が、ともにある同一の連結集合に含まれるならば X は連結である。

証明. X の 1 点 a と X の任意の点 x について、 a, x の両方を含む連結集合を $M(a, x)$ とする。 $M = \{M(a, x) \mid x \in X\}$ とおくと、すべての $x \in X$ についての $M(a, x)$ の和集合は X に等しい、すなわち $X = \cup\{M(a, x) \mid x \in X\}$ であるが、 x_0 を X のある点とすると、すべての $x \in X$ について

$$a \in M(a, x_0) \cap M(a, x) \text{ すなわち } M(a, x_0) \cap M(a, x) \neq \emptyset$$

となる (少なくとも a は $M(a, x_0)$ と $M(a, x)$ に含まれる) ので補題 3.12 により X は連結である。☺

さらに次の補題を示す。

補題 3.14. X と Y が同相な位相空間であるとする。そのとき X が連結ならば Y も連結である。

証明. 同相写像 $f : X \rightarrow Y$ が存在するとする。 A が Y の開集合かつ閉集合であるとする、 f の連続性によって $f^{-1}(A)$ は X の開集合かつ閉集合である。 X は連結であるから $f^{-1}(A) = X$ または $f^{-1}(A) = \emptyset$ である。 f は全射であるから $f(f^{-1}(A)) = A$ および $f(X) = Y$ となる。したがって $A = f(X) (= Y)$ ($f^{-1}(A) = X$ のとき) または $A = \emptyset$ ($f^{-1}(A) = \emptyset$ のとき) であり、 Y は連結である。☺

以上の結果から次の定理が導かれる。

定理 3.15. 位相空間 X_1, X_2, \dots, X_r が各々連結であれば、積空間 $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_r$ も連結である。

証明. 積空間を構成する集合の個数 r についての帰納法で証明する。 $r = 1$ のときは明らか。 $r - 1$ のときに成り立つものと仮定する。 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_r$ の任意の 2 点 $a = (a_1, \dots, a_r), b = (b_1, \dots, b_r)$ に対して、部分集合

$$M_1 = \{a_1\} \times X_2 \times \cdots \times X_r, M_2 = X_1 \times \cdots \times X_{r-1} \times \{b_r\}$$

は、それぞれ $X_2 \times \cdots \times X_r$ と $X_1 \times \cdots \times X_{r-1}$ に同相であるから、帰納法の仮定によって連結である。また $(a_1, \dots, a_{r-1}, b_r)$ という点は M_1, M_2 両方に属している、すなわち $(a_1, \dots, a_{r-1}, b_r) \in M_1 \cap M_2$ である。補題 3.12 より $M_1 \cup M_2$ は a, b を含む連結な集合である (a は M_1 に、 b は M_2 に含まれている)。したがって系 3.13 により $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_r$ は連結である。☺

3.6 単体的複体の連結性とホモロジー群

次に連結な単体的複体のホモロジー群について考えよう。

補題 3.16. K を単体的複体とする。 K は互いに共通部分を持たず、それらの多面体が K の多面体 $|K|$ の連結成分であるような部分複体 K_1, K_2, \dots, K_r に分割される。

証明. K の多面体の連結成分を X_1, X_2, \dots, X_r とし、各 j について $\sigma \subset X_j$ であるような K の単体 σ 全体の族を K_j とする。ある単体が K_j に属していればそのすべての面も K_j に属しているから K_1, K_2, \dots, K_r は K の部分複体である。 $|K|$ の連結成分 X_1, X_2, \dots, X_r が互いに共通部分を持たないのでこれらの部分複体同士も互いに共通部分を持たない。さらに単体 σ 自身が X の連結な部分集合であり (これが弧状連結であることは明らかなので連結でもある)、連結成分の定義から連結な部分集合はいずれかの連結成分に含まれているので $\sigma \in K$ であれば、ある j について $\sigma \in X_j$ である。そうすると $\sigma \in K_j$ となる。したがって $K = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_r$ および $|K| = |K_1| \cup |K_2| \cup \cdots \cup |K_r|$ が得られる。☺

補題 3.17. K を単体的複体とし、 $K = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_r$ と表されるものとする。ただし K_1, K_2, \dots, K_r は互いに共通部分を持たない。そのときすべての整数 q について

$$H_q(K) \cong H_q(K_1) \oplus H_q(K_2) \oplus \cdots \oplus H_q(K_r)$$

である。

証明. $q < 0, q > \dim K$ については $H_q(K) = 0$ なので $0 \leq q \leq \dim K$ の場合を考えればよい。 K の q 鎖 c は各 $K_j (j = 1, 2, \dots, r)$ の q 鎖 c_j によって

$$c = c_1 + c_2 + \cdots + c_r$$

と表される。したがって

$$C_q(K) \cong C_q(K_1) \oplus C_q(K_2) \oplus \cdots \oplus C_q(K_r)$$

である。 z を K の q 輪体 (すなわち $z \in C_q(K)$ で $\partial_q(z) = 0$ を満たす) とすると z を各 K_j の q 鎖 z_j を用いて

$$z = z_1 + z_2 + \cdots + z_r$$

と表すことができる。ここで

$$0 = \partial_q(z) = \partial_q(z_1) + \partial_q(z_2) + \cdots + \partial_q(z_r)$$

であり、各 $\partial_q(z_j)$ は K_j の $q-1$ 鎖である。これが成り立つためには各 $\partial_q(z_i) = 0$ でなければならず、各 $\partial_q(z_i)$ は K_j の q 輪体である。したがって

$$Z_q(K) \cong Z_q(K_1) \oplus Z_q(K_2) \oplus \cdots \oplus Z_q(K_r)$$

が得られる。次に b を K の q 境界輪体とすると、ある $q+1$ 鎖 c によって $b = \partial_{q+1}(c)$ と表され、さらに

$$c = c_1 + c_2 + \cdots + c_r$$

であるから、 $b_j = \partial_{q+1}(c_j)$ ($j = 1, 2, \dots, r$) によって

$$b = b_1 + b_2 + \cdots + b_r$$

となり

$$B_q(K) \cong B_q(K_1) \oplus B_q(K_2) \oplus \cdots \oplus B_q(K_r)$$

を得る。したがって

$$H_q(K) \cong H_q(K_1) \oplus H_q(K_2) \oplus \cdots \oplus H_q(K_r)$$

である。



K を単体的複体、 \mathbf{y}, \mathbf{z} をその頂点として次の定義を置く。

定義 3.3 (単体的複体の連結性). 単体的複体 K の任意の 2 つの頂点 \mathbf{y}, \mathbf{z} について K の頂点の列 $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ で $\mathbf{v}_0 = \mathbf{y}$ かつ $\mathbf{v}_m = \mathbf{z}$ となるようなものがあり、 \mathbf{v}_{j-1} と \mathbf{v}_j とを結ぶ線分が K の辺 (1 次元単体) になっているとき、 K は連結 (connected) であると言う。

これは K の任意の 2 つの頂点が K の 1 次元単体 (辺) の列によって結ばれることを意味する。

補題 3.18. 単体的複体 K の多面体 $|K|$ は、 K が上の意味で連結であるとき、またそのときにのみ連結な位相空間である。

証明. K が上の意味で連結ならば多面体 $|K|$ は明らかに弧状連結であるから連結である*18。

次に $|K|$ が連結な位相空間ならば K が連結であることを示さなければならない。 K の頂点 \mathbf{v}_0 を選び、 K のすべての頂点が \mathbf{v}_0 と 1 次元単体の列によって結ばれることを示す。そのような K の単体の組を K_0 とする。ある単体 σ が K_0 に属していれば σ のすべての面も K_0 に属しているから K_0 は K の部分複体である。したがって K_0 に属さないすべての単体の組 K_1 も K の部分複体であり、かつ $K_0 \cap K_1 = \emptyset$, $K_0 \cup K_1 = K$ が成り立つ。したがって $|K_0| \cap |K_1| = \emptyset$, $|K_0| \cup |K_1| = |K|$ が得られる。 K_0, K_1 の多面体 $|K_0|, |K_1|$ は $|K|$ の閉部分集合であるから、 $|K|$ の連結性より $|K_0|$ か $|K_1|$ のいずれかが空集合でなければならない*19。しかし $\mathbf{v}_0 \in K_0$ であるから $K_1 = \emptyset$ かつ $K_0 = K$ であり、すべての K の頂点が \mathbf{v}_0 と 1 次元単体の列で結ばれる。



定理 3.19. K を単体的複体とする。 K の多面体 $|K|$ が連結ならば $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ である。

*18 $|K|$ のある点とそれを含む単体の頂点とを線分で結ぶことができるから $|K|$ の任意の 2 点を結ぶ線分の列が存在する。

*19 どちらも空集合ではないとすると閉集合の補集合は開集合であり、 $|K_0| \cup |K_1| = |K|$ であるから $|K_0|$ と $|K_1|$ はお互いに補集合でありともに開集合かつ閉集合になってしまうので X の連結性に反する。

証明. $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r$ を K の頂点とする。 K の 0 鎖は n_1, n_2, \dots, n_r を整数として次のように表される。

$$n_1 \langle \mathbf{u}_1 \rangle + n_2 \langle \mathbf{u}_2 \rangle + \dots + n_r \langle \mathbf{u}_r \rangle$$

したがって準同型 $\varepsilon: C_0(K) \rightarrow \mathbb{Z}$ が次のように定義される。

$$\varepsilon(n_1 \langle \mathbf{u}_1 \rangle + n_2 \langle \mathbf{u}_2 \rangle + \dots + n_r \langle \mathbf{u}_r \rangle) = n_1 + n_2 + \dots + n_r$$

\mathbf{y}, \mathbf{z} が K の 1 次元単体の頂点であれば $\varepsilon(\partial_1 \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle) = \varepsilon(\langle \mathbf{z} \rangle - \langle \mathbf{y} \rangle) = 0$ である。したがって $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$ であるから $B_0(K) \subset \ker \varepsilon$ である。

$\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ を 1 次元単体の列をなす頂点とすると

$$\langle \mathbf{v}_m \rangle - \langle \mathbf{v}_0 \rangle = \partial_1 \left(\sum_{j=1}^m \langle \mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{v}_j \rangle \right) \in B_0(K)$$

を得る。 $|K|$ は連結であるから K のすべての頂点は 1 次元単体の列で結ばれる。したがって K の任意の頂点 \mathbf{y}, \mathbf{z} について $\langle \mathbf{z} \rangle - \langle \mathbf{y} \rangle \in B_0(K)$ である。

$c \in \ker \varepsilon$ とすると $c = \sum_{j=1}^r n_j \langle \mathbf{u}_j \rangle$ かつ $\sum_{j=1}^r n_j = 0$ であるから $n_1 = -\sum_{j=2}^r n_j$ となるので $c = \sum_{j=2}^r n_j (\langle \mathbf{u}_j \rangle - \langle \mathbf{u}_1 \rangle)$ と表すことができる。 $\langle \mathbf{u}_j \rangle - \langle \mathbf{u}_1 \rangle \in B_0(K)$ なので $c \in B_0(K)$ であるから $\ker \varepsilon \subset B_0(K)$ である。したがって、上の $B_0(K) \subset \ker \varepsilon$ と合わせて $\ker \varepsilon = B_0(K)$ を得る。

$\varepsilon: C_0(K) \rightarrow \mathbb{Z}$ はすべての整数の値をとり得るので全射であり、その核 $\ker \varepsilon$ は $B_0(K)$ に等しい。したがって準同型定理によって $C_0(K)/B_0(K) \cong \mathbb{Z} (= \text{image } \varepsilon)$ を得るが $Z_0(K) = C_0(K)$ (定義によって $\partial_0 = 0$ である) であるから $H_0(K) = Z_0(K)/B_0(K) \cong \mathbb{Z}$ が導かれる。 ☺

定理 3.19, 補題 3.16, 3.17 より次の結果を得る。

系 3.20. K を単体的複体とし、 $|K|$ が r 個の連結成分からなっているとすると

$$H_0(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \quad (r \text{ 個})$$

次に錐複体について考える。

補題 3.21. K を単体的複体とする。 K の頂点 \mathbf{w} で次の条件を満たすものがあると仮定する。

$\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q$ が K の単体を張れば、 $\mathbf{w}, \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q$ も K の単体を張る。

この仮定は K のあらゆる q 次元単体に \mathbf{w} を加えれば $q+1$ 次元単体になることを意味する。そのとき $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ であり、すべての $q > 0$ について $H_q(K) = 0$ である。

上記の条件を満たす単体的複体を錐複体 (cone complex) と呼ぶ。

証明. \mathbf{v} を K の任意の頂点とすると \mathbf{v} と \mathbf{w} をともに頂点として持つ単体が存在する。したがって任意の K の 2 つの頂点は \mathbf{w} を介して 1 次元単体の列で結ぶことができるので K は連結であるから $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ である (定理 3.19)。

次に $q > 0$ の場合を考えよう。

$$D_q(\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q \rangle) = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q \rangle$$

とすると, $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q$ を K の単体を張る頂点として

$$\begin{aligned} \partial_{q+1}(D_q(\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q \rangle)) &= \partial_{q+1}(\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q \rangle) \\ &= \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q \rangle + \sum_{j=0}^q (-1)^{j+1} \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_0, \dots, \hat{\mathbf{v}}_j, \dots, \mathbf{v}_q \rangle \\ &= \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q \rangle - D_{q-1}(\partial_q(\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q \rangle)) \end{aligned}$$

が得られる。したがって, すべての $c \in C_q(K)$ について

$$\partial_{q+1}(D_q(c)) + D_{q-1}(\partial_q(c)) = c$$

が得られる。特にすべての $z \in Z_q(K)$ について $z = \partial_{q+1}(D_q(z))$ であるから ($\partial_q z = 0$ である) $Z_q(K) \subset B_q(K)$ である。一方 $B_q(K) \subset Z_q(K)$ であるから $Z_q(K) = B_q(K)$ が得られる。以上によってすべての $q > 0$ について $H_q(K) = 0$ が得られる。☺

例 3.5. ある単体 σ とそのすべての面 (辺, 頂点を含む) からなる単体的複体 K_σ は上の補題の仮定を満たしている。その場合 \mathbf{w} としてはあらゆる σ の頂点をとることができる。また, その K_σ を 1 回重心分割してできた単体的複体 K'_σ もその仮定を満たす。この場合 \mathbf{w} としては σ の重心をとらなければならない。したがって $H_0(K_\sigma) \cong \mathbb{Z}, H_0(K'_\sigma) \cong \mathbb{Z}$ であり, $q > 0$ に対しては $H_q(K_\sigma) = H_q(K'_\sigma) = 0$ である。

例 3.6. 上の例は $n(n \geq 1)$ 次元単体 Δ^n とそのすべての面を含む単体的複体 $K(\Delta^n)$ について $H_0(K(\Delta^n)) \cong \mathbb{Z}, H_q(K(\Delta^n)) = 0(q > 0)$ を意味するが, K から Δ^n 自身を除いたもの, すなわち Δ^n に含まれる $n-1$ 次元以下のすべての面からなる単体的複体を $K(\partial\Delta^n)$ としてそのホモロジー群を求めてみよう。 $n \geq 2$ と仮定する。

$K(\Delta^n)$ の q 次元鎖群 $C_q(K(\Delta^n))$ と $K(\partial\Delta^n)$ の q 次元鎖群 $C_q(K(\partial\Delta^n))$ を比較すると, $q = 0, 1, \dots, n-1$ については

$$C_q(K(\Delta^n)) = C_q(K(\partial\Delta^n))$$

で境界準同型 ∂_q も $q = 0, 1, \dots, n-1$ については等しい。したがって

$$Z_q(K(\Delta^n)) = Z_q(K(\partial\Delta^n)) \quad (q = 0, 1, \dots, n-1)$$

$$B_q(K(\Delta^n)) = B_q(K(\partial\Delta^n)) \quad (q = 0, 1, \dots, n-2) \quad (n-2 \text{ に注意})$$

となり $q = 0, 1, \dots, n-2$ について

$$H_q(K(\Delta^n)) = H_q(K(\partial\Delta^n))$$

が得られる。また補題 3.21 より $H_{n-1}(K(\Delta^n)) = Z_{n-1}(K(\Delta^n))/B_{n-1}(K(\Delta^n)) = 0$ から

$$Z_{n-1}(K(\Delta^n)) \cong B_{n-1}(K(\Delta^n))$$

である。一方

$$C_n(K(\Delta^n)) = \{c : c = n\Delta^n, n \in \mathbb{Z}\}$$

であるから, $C_n(K(\Delta^n)) \cong \mathbb{Z}$ であり

$$B_{n-1}(K(\Delta^n)) = \{b : b = n\partial_n(\Delta^n), n \in \mathbb{Z}\}$$

より

$$Z_{n-1}(K(\Delta^n)) \cong B_{n-1}(K(\Delta^n)) \cong \mathbb{Z}$$

となる。これより

$$Z_{n-1}(K(\partial\Delta^n)) = Z_{n-1}(K(\Delta^n)) \cong \mathbb{Z}$$

が得られる。一方 $K(\partial\Delta^n)$ には n 次元の単体は存在しないので $C_n(K(\partial\Delta^n))=0$ であるから

$$B_{n-1}(K(\partial\Delta^n)) = 0$$

なので

$$H_{n-1}(K(\partial\Delta^n)) = Z_{n-1}(K(\partial\Delta^n))/B_{n-1}(K(\partial\Delta^n)) \cong \mathbb{Z}$$

となる。この点だけが $K(\Delta^n)$ と $K(\partial\Delta^n)$ のホモロジー群の違いである。

以上は $n \geq 2$ の場合であるが、 $n = 1$ の場合 Δ^1 は線分となり、 $\partial\Delta^1$ はその線分の両端の 2 点によって構成される。したがって連結な 2 つの単体的複体の和集合となるので

$$H_q(\partial\Delta^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \quad (q = 0)$$

$$H_q(\partial\Delta^1) = 0 \quad (q > 0)$$

である。

3.7 ホモロジー代数, 完全系列

ホモロジー群の代数的な取り扱いをホモロジー代数 (homological algebra) と呼ぶ。ホモロジー代数では次のような系列を考える。

$$\dots \rightarrow F \xrightarrow{p} G \xrightarrow{q} H \rightarrow \dots$$

F, G, H はアーベル群, p, q は準同型である。

定義 3.4 (完全系列). アーベル群と準同型の系列 $F \xrightarrow{p} G \xrightarrow{q} H$ が次の条件を満たすとき完全系列 (exact sequence) であると言う。

$$\text{image}(p : F \rightarrow G) = \ker(q : G \rightarrow H)$$

アーベル群と準同型の系列がそれに含まれる各アーベル群についてこの条件を満たすとき完全系列であると言う。

補題 3.22. $h : G \rightarrow H$ がアーベル群の準同型であるとする。

- (1). 系列 $0 \rightarrow G \xrightarrow{h} H$ が完全系列ならば, またそのときにのみ準同型 $h : G \rightarrow H$ は単射である。
- (2). 系列 $G \xrightarrow{h} H \rightarrow 0$ が完全系列ならば, またそのときにのみ準同型 $h : G \rightarrow H$ は全射である。
- (3). 系列 $0 \rightarrow G \xrightarrow{h} H \rightarrow 0$ が完全系列ならば, またそのときにのみ準同型 $h : G \rightarrow H$ は全単射である。

0 は単位元のみからなる群であるから $0 \rightarrow G$ は 0 が 0 だけに対応する準同型, $H \rightarrow 0$ は H のすべての要素が 0 に対応する準同型を表す。

証明. (1). 補題 1.15 により $\ker h = 0$ のとき, またそのときにのみ h は単射である。

(2). H のすべての要素が 0 に対応するので $\text{image } h = H$ であるから h は全射である。

(3). 上記 (1), (2) より h は全単射である。



補題 3.23. F をアーベル群 G の部分群とすると

$$0 \rightarrow F \xrightarrow{i} G \xrightarrow{q} G/F \rightarrow 0$$

は完全系列である。ただし、 G/F は商群、 i は包含準同型 (包含写像であるような準同型であり、 F のすべての要素が、 G に含まれるそれぞれと同一の F の要素に対応する)、 $q: G \rightarrow G/F$ は商準同型 (G の各要素 g が gF に対応する) である。

証明. i が包含準同型であるから $\ker i = 0 (= \text{image } 0)$ が成り立つ。また q は商準同型であるから $q(g) = F$ (F は G/F の単位元) となるのは $g \in F$ の場合であり、 $\ker q = F = \text{image } i$ が得られる。また $\text{image } q = G/F$ である。☺

逆に

$$0 \rightarrow F \xrightarrow{i} G \xrightarrow{q} H \rightarrow 0$$

という形の完全系列が与えられれば F と $i(F)$ (包含写像の像) を同一視することによって F を G の部分群と見て、 H を商群 G/F と同型な群と見なすことができる。このようなタイプの完全系列を短完全系列 (short exact sequence) と呼ぶ。

次に「可換な図式」(commutative diagram) という概念を導入する。これはその図式の中に、完全系列をなすさまざまなアーベル群の間の準同型の組を表現するものである。例として次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ \downarrow p & & \downarrow q & & \downarrow r \\ D & \xrightarrow{h} & E & \xrightarrow{k} & F \end{array}$$

$q \circ f = h \circ p$ かつ $r \circ g = k \circ q$ であればこの図式は可換である。すなわち A から E 、あるいは B から F へ至るのに 2 つのルートのいずれを通っても同じ結果になるとき図式は可換であると言う。

補題 3.24. 次のアーベル群と準同型の図式が可換であり、かつ上下 2 つの系列が完全系列であるとする。

$$\begin{array}{ccccccccc} G_1 & \xrightarrow{\theta_1} & G_2 & \xrightarrow{\theta_2} & G_3 & \xrightarrow{\theta_3} & G_4 & \xrightarrow{\theta_4} & G_5 \\ \downarrow \psi_1 & & \downarrow \psi_2 & & \downarrow \psi_3 & & \downarrow \psi_4 & & \downarrow \psi_5 \\ H_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & H_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & H_3 & \xrightarrow{\varphi_3} & H_4 & \xrightarrow{\varphi_4} & H_5 \end{array}$$

そのとき次の結果を得る。

- (1). 準同型 ψ_2, ψ_4 が単射であり、かつ ψ_1 が全射であれば ψ_3 は単射である。
- (2). 準同型 ψ_2, ψ_4 が全射であり、かつ ψ_5 が単射であれば ψ_3 は全射である。

証明. (1). ψ_2, ψ_4 が単射、 ψ_1 が全射であると仮定して、 ψ_3 が単射であることを示さなければならない。 $x \in G_3$ について $\psi_3(x) = 0$ が満たされるとする。そのとき $\psi_4(\theta_3(x)) = \varphi_3(\psi_3(x)) = 0$ であり、 ψ_4 が単射であるから $\theta_3(x) = 0$ でなければならない。すなわち $x \in \ker \theta_3$ である。したがって完全系列の条件 ($\ker \theta_3 = \text{image } \theta_2$) より、ある $y \in G_2$ について $x = \theta_2(y)$ でなければならない。さらに

$$\varphi_2(\psi_2(y)) = \psi_3(\theta_2(y)) = \psi_3(x) = 0$$

であり、完全系列の条件 ($\ker \varphi_2 = \text{image } \varphi_1$) から、ある $z \in H_1$ について $\psi_2(y) = \varphi_1(z)$ である。一方 ψ_1 が全射であることより、ある $w \in G_1$ について $z = \psi_1(w)$ である。したがって

$$\psi_2(\theta_1(w)) = \varphi_1(\psi_1(w)) = \varphi_1(z) = \psi_2(y)$$

を得る。 ψ_2 が単射であるから $\theta_1(w) = y$ であるが、そうすると完全系列の条件 ($\ker \theta_2 = \text{image } \theta_1$) により

$$x = \theta_2(y) = \theta_2(\theta_1(w)) = 0$$

が得られる。よって $\ker \psi_3 = \{0\}$ なので ψ_3 は単射である。

- (2). ψ_2, ψ_4 が全射, ψ_5 が単射であると仮定して, ψ_3 が全射であることを示さなければならない。 $a \in H_3$ とすると ψ_4 は全射であるから、ある $b \in G_4$ について $\varphi_3(a) = \psi_4(b)$ である。すると

$$\psi_5(\theta_4(b)) = \varphi_4(\psi_4(b)) = \varphi_4(\varphi_3(a)) = 0$$

となる (完全系列の条件より $\ker \varphi_4 = \text{image } \varphi_3$ であるから)。 ψ_5 は単射であるから $\theta_4(b) = 0$ となる。したがって完全系列の条件 ($\ker \theta_4 = \text{image } \theta_3$) により $\theta_3(c) = b$ となるような $c \in G_3$ がある。よって

$$\varphi_3(\psi_3(c)) = \psi_4(\theta_3(c)) = \psi_4(b) = \varphi_3(a)$$

となり $\varphi_3(a - \psi_3(c)) = 0$ を得る。したがって完全系列の条件 ($\ker \varphi_3 = \text{image } \varphi_2$) によりある $d \in H_2$ について $a - \psi_3(c) = \varphi_2(d)$ となる。 ψ_2 は全射であるから $\psi_2(e) = d$ を満たす $e \in G_2$ が存在する。したがって

$$\psi_3(\theta_2(e)) = \varphi_2(\psi_2(e)) = \varphi_2(d) = a - \psi_3(c)$$

が得られる。よって $a = \psi_3(c + \theta_2(e))$ であり、 a は ψ_3 の像 (の集合) に属する。これで ψ_3 が全射であることが示された。

☺

この補題から次の結果が導かれる。

補題 3.25 (5 項補題 (Five-Lemma)). 補題 3.24 の可換な図式の上下の系列が完全系列であり、 $\psi_1, \psi_2, \psi_4, \psi_5$ が同型 (全単射である準同型) であるとする。そのとき ψ_3 も同型である。

証明. 補題 3.24 により ψ_3 は単射かつ全射であるから同型である。

☺

3.8 鎖複体

定義 3.5 (鎖複体). 各 $i \in \mathbb{Z}$ について $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$ を満たす準同型 $\partial_i : C_i \rightarrow C_{i-1}$ を伴って定義されるアーベル群の列 ($C_i : i \in \mathbb{Z}$) を鎖複体 (chain complex) と呼び C_* で表す。

また、 C_* の i 次元ホモロジー群 $H_i(C_*)$ を商群 $Z_i(C_*)/B_i(C_*)$ によって定義する。ここで、 $Z_i(C_*)$ は $\partial_i : C_i \rightarrow C_{i-1}$ の核 (kernel), $B_i(C_*)$ は $\partial_{i+1} : C_{i+1} \rightarrow C_i$ の像 (image) である。

定義 3.6 (鎖写像). C_*, D_* を鎖複体とする。すべての $i \in \mathbb{Z}$ について $f_{i-1} \circ \partial_i = \partial_i \circ f_i$ を満たす準同型 $f_i : C_i \rightarrow D_i$ の列を $f : C_* \rightarrow D_*$ と表し、鎖写像 (chain map) と呼ぶ。

上記の条件は次の図式が可換になるとき, すなわち $f_i \circ \partial_{i+1} = \partial_{i+1} \circ f_{i+1}$, $f_{i-1} \circ \partial_i = \partial_i \circ f_i$ となるとき, またそのときにのみ準同型 $f_i : C_i \rightarrow D_i$ の組によって鎖写像 $f : C_* \rightarrow D_*$ が定義されることを意味する。

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{i+1} & \xrightarrow{\partial_{i+1}} & C_i & \xrightarrow{\partial_i} & C_{i-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f_{i+1} & & \downarrow f_i & & \downarrow f_{i-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & D_{i+1} & \xrightarrow{\partial_{i+1}} & D_i & \xrightarrow{\partial_i} & D_{i-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

補題 3.26. C_*, D_* を鎖複体, $f : C_* \rightarrow D_*$ を鎖写像とすると, すべての $i \in \mathbb{Z}$ について $f_i(Z_i(C_*)) \subset Z_i(D_*)$ および $f_i(B_i(C_*)) \subset B_i(D_*)$ が成り立つ。

証明. (1). $f_i(Z_i(C_*))$ の要素は

$$z = f_i(z') \quad (z' \in Z_i(C_*))$$

と表される。 $z \in Z_i(D_*)$ を証明するには $\partial_i(z) = 0$ を示せばよい。

$$\partial_i(z) = \partial_i(f_i(z')) = f_{i-1}(\partial_i(z')) = 0 \quad (\partial_i(z') = 0 \text{ と } \partial_i \circ f_i = f_{i-1} \circ \partial_i \text{ より導かれる})$$

である。

(2). $f_i(B_i(C_*))$ の要素は

$$b = f_i(b') \quad (b' \in B_i(C_*))$$

と表される。 $b' = \partial_{i+1}(c)$ となる $c \in C_{i+1}$ があるから

$$b = f_i(b') = f_i(\partial_{i+1}(c)) = \partial_{i+1}(f_{i+1}(c)) \quad (\partial_{i+1} \circ f_{i+1} = f_i \circ \partial_{i+1} \text{ より})$$

したがって $b \in B_i(D_*)$ である。

☺

この補題により $f_i : C_i \rightarrow D_i$ からホモロジー群の準同型 $f_* : H_i(C_*) \rightarrow H_i(D_*)$ が導かれる。この準同型はすべての $z \in Z_i(C_*)$ についてホモロジー類 $[z]$ を $[f_i(z)]$ に対応させる。ここで $[z] = z + B_i(C_*)$, $[f_i(z)] = f_i(z) + B_i(D_*)$ である。

定義 3.7 (鎖複体の短完全系列). 鎖複体の短完全系列とは系列

$$0 \longrightarrow A_i \xrightarrow{p_i} B_i \xrightarrow{q_i} C_i \longrightarrow 0$$

がすべての i について完全系列となるような鎖複体 A_*, B_*, C_* と鎖写像 $p_* : A_* \rightarrow B_*, q_* : B_* \rightarrow C_*$ の組を言う。

定義から $0 \longrightarrow A_* \xrightarrow{p_*} B_* \xrightarrow{q_*} C_* \longrightarrow 0$ が短完全系列となるのは次の図式が可換であ

り, また各系列が完全系列で縦の各列が鎖複体になっている場合, またその場合のみである。

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow \partial_{i+2} & & \downarrow \partial_{i+2} & & \downarrow \partial_{i+2} \\
 0 & \longrightarrow & A_{i+1} & \xrightarrow{p_{i+1}} & B_{i+1} & \xrightarrow{q_{i+1}} & C_{i+1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial_{i+1} & & \downarrow \partial_{i+1} & & \downarrow \partial_{i+1} \\
 0 & \longrightarrow & A_i & \xrightarrow{p_i} & B_i & \xrightarrow{q_i} & C_i \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial_i & & \downarrow \partial_i & & \downarrow \partial_i \\
 0 & \longrightarrow & A_{i-1} & \xrightarrow{p_{i-1}} & B_{i-1} & \xrightarrow{q_{i-1}} & C_{i-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial_{i-1} & & \downarrow \partial_{i-1} & & \downarrow \partial_{i-1} \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

補題 3.27. 鎖複体の短完全系列 $0 \longrightarrow A_* \xrightarrow{p_*} B_* \xrightarrow{q_*} C_* \longrightarrow 0$ に対して $z \in Z_i(C_*)$ のホモロジー類 $[z]$ を $w \in Z_{i-1}(A_*)$ のホモロジー類 $[w]$ に対応させ, $q_i(b) = z$ を満たすある $b \in B_i$ について $p_{i-1}(w) = \partial_i(b)$ が成り立つような準同型

$$\alpha : H_i(C_*) \rightarrow H_{i-1}(A_*)$$

が定義される ($\alpha([z]) = [w]$ である)。

証明. $z \in Z_i(C_*)$ とする。補題 3.22 より q_i は全射であるから $q_i(b) = z$ を満たす $b \in B_i$ がある。さらに

$$q_{i-1}(\partial_i(b)) = \partial_i(q_i(b)) = \partial_i(z) = 0$$

が成り立つ (q_i が鎖写像であるから)。一方 p_{i-1} は単射であり (補題 3.22 より),

$$0 \longrightarrow A_{i-1} \xrightarrow{p_{i-1}} B_{i-1} \xrightarrow{q_{i-1}} C_{i-1}$$

が完全系列であることによって $p_{i-1}(A_{i-1}) = \text{image } p_{i-1} = \ker q_{i-1}$ であるから, $\partial_i(b) = p_{i-1}(w)$ となるようなただ 1 つの w がある。さらに p_i が鎖写像であることと $\partial_{i-1} \circ \partial_i = 0$ より

$$p_{i-2}(\partial_{i-1}(w)) = \partial_{i-1}(p_{i-1}(w)) = \partial_{i-1}(\partial_i(b)) = 0$$

が得られる。 $p_{i-2} : A_{i-2} \rightarrow B_{i-2}$ は単射であるから $\partial_{i-1}(w) = 0$ となる。ここで $b, b' \in B_i$ を $q_i(b) = q_i(b') = z$ を満たす要素であり, また $w, w' \in Z_{i-1}(A_*)$ を $p_{i-1}(w) = \partial_i(b)$, $p_{i-1}(w') = \partial_i(b')$ を満たす要素であるとする, $q_i(b' - b) = 0$ から, ある $a \in A_i$ について $b' - b = p_i(a)$ が成り立つ ($\ker q_i = \text{image } p_i$ より)。そのとき

$$\begin{aligned}
 p_{i-1}(w + \partial_i(a)) &= p_{i-1}(w) + p_{i-1}(\partial_i(a)) = p_{i-1}(w) + \partial_i(p_i(a)) = \partial_i(b) + \partial_i(b' - b) \\
 &= \partial_i(b') = p_{i-1}(w')
 \end{aligned}$$

が得られる。 $p_{i-1} : A_{i-1} \rightarrow B_{i-1}$ は単射であるから $w + \partial_i(a) = w'$ となり $[w] = [w'] = H_{i-1}(A_*)$, すなわち w と w' は同じホモロジー類に属する ($\partial_i(a) \in B_{i-1}(A_*)$ である)。したがって, $q_i(b) = z$ を満たすある $b \in B_i$ に対して $p_{i-1}(w) = \partial_i(b)$ となるように $w \in Z_{i-1}(A_*)$ が選ばれる形で $z \in Z_i(C_*)$ を $[w] \in H_{i-1}(A_*)$ に対応させる関数 $\hat{\alpha} : Z_i(C_*) \rightarrow H_{i-1}(A_*)$ が定義される。 p_{i-1}, q_i などそれぞれが準同型であるから $\hat{\alpha}$ は $Z_i(C_*)$ から $H_{i-1}(A_*)$ への準同型である。

$z, z' \in Z_i(C_*)$ を同じホモロジー類に属するものとする。するとある $c \in C_{i+1}$ について $z' = z + \partial_{i+1}c$ であり, さらに $q_{i+1} : B_{i+1} \rightarrow C_{i+1}$ が全射であるから, ある $d \in B_{i+1}$ について $c = q_{i+1}(d)$ が成り立つ。 $q_i(b) = z$ を満たすような b を選び, $b' = b + \partial_{i+1}(d)$ とおくと

$$q_i(b') = z + q_i(\partial_{i+1}(d)) = z + \partial_{i+1}(q_{i+1}(d)) = z + \partial_{i+1}(c) = z'$$

が得られる。さらに $\partial_i(b') = \partial_i(b + \partial_{i+1}(d)) = \partial_i(b)$ である ($\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$ より)。したがって $p_{i-1}(w)$ の値が等しく w が同一になるから $\hat{\alpha}_i(z) = \hat{\alpha}_i(z')$ となり, 準同型 $\hat{\alpha}_i : Z_i(C_*) \rightarrow H_{i-1}(A_*)$ によってホモロジー群の準同型 $\alpha : H_i(C_*) \rightarrow H_{i-1}(A_*)$ が導かれる。☺

補題 3.28. $0 \longrightarrow A_* \xrightarrow{p_*} B_* \xrightarrow{q_*} C_* \longrightarrow 0$ および

$0 \longrightarrow A'_* \xrightarrow{p'_*} B'_* \xrightarrow{q'_*} C'_* \longrightarrow 0$ を鎖複体の短完全系列, $\lambda : A_* \rightarrow A'_*$ と $\mu : B_* \rightarrow B'_*$ を鎖写像とし, 各 $i \in \mathbb{Z}$ について $\alpha_i : H_i(C_*) \rightarrow H_{i-1}(A_*)$ および $\alpha'_i : H_i(C'_*) \rightarrow H_{i-1}(A'_*)$ を補題 3.27 で定義された準同型とする。そのとき次の図式

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_* & \xrightarrow{p_*} & B_* & \xrightarrow{q_*} & C_* & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \lambda_* & & \downarrow \mu_* & & \downarrow \nu_* & & \\ 0 & \longrightarrow & A'_* & \xrightarrow{p'_*} & B'_* & \xrightarrow{q'_*} & C'_* & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

がすべての $i \in \mathbb{Z}$ について可換であれば ($p'_i \circ \lambda_i = \mu_i \circ p_i$ かつ $q'_i \circ \mu_i = \nu_i \circ q_i$), 図式

$$\begin{array}{ccc} H_i(C_*) & \xrightarrow{\alpha_i} & H_{i-1}(A_*) \\ \downarrow \nu_* & & \downarrow \lambda_* \\ H_i(C'_*) & \xrightarrow{\alpha'_i} & H_{i-1}(A'_*) \end{array}$$

は, すべての $i \in \mathbb{Z}$ について可換である ($\lambda_* \circ \alpha_i = \alpha'_i \circ \nu_*$)。

証明. $c \in Z_i(C_*)$ として $\lambda_{i-1}(\alpha_i([c])) = \alpha'_i(\nu_i([c]))$ を示す。 $q_i(b) = c$, $p_{i-1}(a) = \partial_i(b)$ となる $a \in Z_{i-1}(A_*)$, $b \in B_i$ をとれば, $\alpha_i([c]) = [a]$, $q'_i(\mu_i(b)) = \nu_i(q_i(b)) = \nu_i(c)$, $p'_{i-1}(\lambda_{i-1}(a)) = \mu_{i-1}(p_{i-1}(a)) = \mu_{i-1}(\partial_i(b)) = \partial_i(\mu_i(b))$ であるから, $\alpha'_i(\nu_i([c])) = [\lambda_{i-1}(a)]$ が得られる*20。一方 $\lambda_{i-1}(\alpha_i([c])) = \lambda_{i-1}([a]) = [\lambda_{i-1}(a)]$ である。したがって $\lambda_{i-1}(\alpha_i([c])) = \alpha'_i(\nu_i([c]))$ を得る。☺

補題 3.29. $0 \longrightarrow A_* \xrightarrow{p_*} B_* \xrightarrow{q_*} C_* \longrightarrow 0$ を鎖複体の短完全系列とする。そのときホモロジー群の (無限の) 系列

$$\dots \xrightarrow{\alpha_{i+1}} H_i(A_*) \xrightarrow{p_*} H_i(B_*) \xrightarrow{q_*} H_i(C_*) \xrightarrow{\alpha_i} H_{i-1}(A_*) \xrightarrow{p_*} H_{i-1}(B_*) \xrightarrow{q_*} \dots$$

は完全系列である。ここで $\alpha_i : H_i(C_*) \rightarrow H_{i-1}(A_*)$ はホモロジー類 $[z](z \in Z_i(C_*))$ をホモロジー類 $[w](w \in Z_{i-1}(A_*))$ に対応させる準同型で, $q_i(b) = z$ となる $b \in B_i$ について $p_{i-1}(w) = \partial_i(b)$ を満たす。

証明. (1). $\text{image } q_* \subset \ker \alpha_i$

$x \in Z_i(B_*)$ とすると, $p_{i-1}(w) = \partial_i(x)$ を満たす $Z_{i-1}(A_*)$ のただ 1 つの要素を w として $\alpha_i(q_*[x]) = \alpha_i([q_i(x)]) = [w]$ が成り立つ。ここで $\partial_i(x) = 0$ であるから $w = 0$ である (p_{i-1} は単射)。したがって $\alpha_i \circ q_* = 0$ を得る。

*20 $q'_i(x) = y$, $p'_{i-1}(\bar{v}) = \partial_i(x)$ として $\alpha'_i([y]) = [\bar{v}]$ が得られる。ここでは $x = \mu_i(b)$, $y = \nu_i(c)$, $\bar{v} = \lambda_{i-1}(a)$ である。

(2). $\ker \alpha_i \subset \text{image } q_*$

$[z] \in \ker \alpha_i$ であるような $Z_i(C_*)$ の要素を z とし, $b \in B_i, w \in Z_{i-1}(A_*)$ を $q_i(b) = z, p_{i-1}(w) = \partial_i(b)$ を満たす要素とすると, $[w] = \alpha_i([z]) = 0$ であるから $([z] \in \ker \alpha_i)$, ある $a \in A_i$ について $w = \partial_i(a)$ である。そうすると $q_i(b - p_i(a)) = z, \partial_i(b - p_i(a)) = \partial_i(b) - p_{i-1}(\partial_i(a)) = \partial_i(b) - p_{i-1}(w) = 0$ となる (完全系列の条件より $q_i(p_i(a)) = 0$ である)。したがって, $b - p_i(a) \in Z_i(B_*)$, $q_*([b - p_i(a)]) = [z]$ である。

(3). $\text{image } p_* \subset \ker q_*$

鎖複体の完全系列の条件によって $q_i \circ p_i = 0$, すなわち $q_* \circ p_* = 0$ が成り立つから $p_*: H_i(A_*) \rightarrow H_i(B_*)$ の像 (image) は $q_*: H_i(B_*) \rightarrow H_i(C_*)$ の核 (kernel) に含まれる。

(4). $\ker q_* \subset \text{image } p_*$

x を $[x] \in \ker q_*$ であるような $Z_i(B_*)$ の要素とすると, ある $c \in C_{i+1}$ について $q_i(x) = \partial_{i+1}(c)$ である ($q_*([x]) = 0$ なので)。一方, $q_{i+1}: B_{i+1} \rightarrow C_{i+1}$ が全射であることから, ある $d \in B_{i+1}$ について $c = q_{i+1}(d)$ となるので

$$q_i(x - \partial_{i+1}(d)) = q_i(x) - \partial_{i+1}(q_{i+1}(d)) = q_i(x) - \partial_{i+1}(c) = 0$$

が得られる。したがって完全系列の条件によって, ある $a \in A_i$ について $x - \partial_{i+1}(d) = p_i(a)$ となる。さらに $\partial_i(x) = 0$ ($x \in Z_i(B_*)$ より) かつ $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$ であるから

$$p_{i-1}(\partial_i(a)) = \partial_i(p_i(a)) = \partial_i(x - \partial_{i+1}(d)) = 0$$

を得る。 $p_{i-1}: A_{i-1} \rightarrow B_{i-1}$ は単射であるから $\partial_i(a) = 0$ となり, a は $H_i(A_*)$ のある要素 $[a]$ を代表する ($a \in Z_i(A_*)$)。よって $d' = -d$ として

$$[x] = [x + \partial_{i+1}(d')] = [p_i(a)] = p_*([a])$$

が導かれる。

(5). $\text{image } \alpha_i \subset \ker p_*$

$z \in Z_i(C_*)$ とする。 $w \in Z_{i-1}(A_*)$ を $q_i(b) = z$ となるようなある $b \in B_i$ に対して $p_{i-1}(w) = \partial_i(b)$ を満たす要素とすると $\alpha_i([z]) = [w]$ が得られる。すると, $p_*(\alpha_i([z])) = [p_{i-1}(w)] = [\partial_i(b)] = 0$ となる。したがって $p_* \circ \alpha_i = 0$ である。

(6). $\ker p_* \subset \text{image } \alpha_i$

w を $[w] \in \ker p_*$ を満たすような $Z_{i-1}(A_*)$ の要素とすると $H_{i-1}(B_*)$ において $[p_{i-1}(w)] = 0$ であるから, ある $b \in B_i$ について $p_{i-1}(w) = \partial_i(b)$ となる。一方

$$\partial_i(q_i(b)) = q_{i-1}(\partial_i(b)) = q_{i-1}(p_{i-1}(w)) = 0$$

であるから, $z = q_i(b)$ とすると $[w] = \alpha_i([z])$ が成り立つ。

☺

3.9 マイヤー・ビートリス完全系列

K を単体的複体, L, M を $K = L \cup M$ を満たす K の部分複体とし

$$i_q: C_q(L \cap M) \rightarrow C_q(L), \quad j_q: C_q(L \cap M) \rightarrow C_q(M)$$

$$u_q: C_q(L) \rightarrow C_q(K), \quad v_q: C_q(M) \rightarrow C_q(K)$$

を包含写像 $i: L \cap M \rightarrow L, j: L \cap M \rightarrow M, u: L \rightarrow K, v: M \rightarrow K$ から誘導される準同型とすると,

$$0 \longrightarrow C_*(L \cap M) \xrightarrow{k_*} C_*(L) \oplus C_*(M) \xrightarrow{w_*} C_*(K) \longrightarrow 0$$

は短完全系列である*21。ここですべての $c \in C_q(L \cap M), c' \in C_q(L), c'' \in C_q(M)$ について

$$\begin{aligned} k_q(c) &= (i_q(c), -j_q(c)) \\ w_q(c', c'') &= u_q(c') + v_q(c'') \\ \partial_q(c', c'') &= (\partial_q(c'), \partial_q(c'')) \end{aligned}$$

である (k_* は単射であり, w_* は全射である)*22。

補題 3.27 より, c', c'' を $z \in Z_q(K)$ に対して $z = c' + c''$ を満たす L と M の q 鎖として, $\alpha_q([z]) = [\partial_q(c')] = -[\partial_q(c'')]$ を満たすような準同型 $\alpha_q: H_q(K) \rightarrow H_{q-1}(L \cap M)$ が存在する*23。したがって補題 3.29 より次のホモロジー群の系列

$$\begin{aligned} \dots &\xrightarrow{w_*} H_{q+1}(K) \xrightarrow{\alpha_{q+1}} H_q(L \cap M) \xrightarrow{k_*} H_q(L) \oplus H_q(M) \longrightarrow \\ &\xrightarrow{w_*} H_q(K) \xrightarrow{\alpha_q} H_{q-1}(L \cap M) \xrightarrow{k_*} \dots \end{aligned}$$

は完全系列である。この完全系列は, K の L と M への分割に関するマイヤー・ビートリス (Mayer-Vietoris) 完全系列と呼ばれる。

3.10 隣接する単体写像

定義 3.8 (隣接する単体写像). 単体的複体 K から L への 2 つの単体写像 $s: K \rightarrow L, t: K \rightarrow L$ が次の条件を満たすとき隣接している (contiguous) と言う。

K の任意の単体 σ の各頂点 \mathbf{v} について, $s(\mathbf{v})$ と $t(\mathbf{v})$ が τ の頂点となるような L の単体 τ が存在する。

補題 3.30. K, L を単体的複体, $s: K \rightarrow L, t: K \rightarrow L$ をある連続関数 $f: |K| \rightarrow |L|$ の単体近似であるとする。そのとき s と t は隣接している。

証明. \mathbf{x} を K のある単体 σ の内部の点とする。そのとき $f(\mathbf{x})$ は L のただ 1 つの単体 τ の内部に属しており, さらに, s, t が f の単体近似であるから $s(\mathbf{x}) \in \tau$ かつ $t(\mathbf{x}) \in \tau$ である。 $s(\mathbf{x})$ と $t(\mathbf{x})$ は L の単体 $s(\sigma), t(\sigma)$ の内部に含まれているから $s(\sigma), t(\sigma)$ は τ の面になる。したがって σ の各頂点 \mathbf{v} について $s(\mathbf{v}), t(\mathbf{v})$ は τ の頂点である。 ☺

補題 3.31. $s: K \rightarrow L, t: K \rightarrow L$ を K から L への単体写像とし, s と t は隣接していると仮定する。そのとき準同型 $s_*: H_q(K) \rightarrow H_q(L)$ と $t_*: H_q(K) \rightarrow H_q(L)$ は, すべての q において一致する。

21 $C_(L) \oplus C_*(M) = \{(c_1, c_2) \mid c_1 \in C_*(L), c_2 \in C_*(M)\}$ である。

*22 $\partial k_q(c) = (\partial(c), -\partial(c)) = k_{q-1}[\partial(c)]$ なので k_q は鎖準同型, $\partial w_q(c', c'') = \partial(c') + \partial(c'') = w_{q-1}[\partial(c'), \partial(c'')]$ となるので w_q は鎖準同型である。

*23 $\partial_q(c') \in Z_{q-1}(L), \partial_q(c'') \in Z_{q-1}(M)$ および $\partial_q(c') = -\partial_q(c'')$ であるから $\partial_q(c') \in Z_{q-1}(L \cap M)$ である。 $z = w(c', c''), k_{q-1}(\partial_q c') = (\partial_q c', \partial_q c'')$ とすると $\alpha_q([z]) = [\partial_q(c')]$ が得られる。

証明. K の頂点に適当に順番をつけると次の式で表される準同型 $D_q : C_q(K) \rightarrow C_{q+1}(L)$ が定義される。

$$D_q(\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q \rangle) = \sum_{j=0}^q (-1)^j \langle s(\mathbf{v}_0), \dots, s(\mathbf{v}_j), t(\mathbf{v}_j), \dots, t(\mathbf{v}_q) \rangle$$

$\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q$ は順番をつけた K のある q 次元単体の頂点である*24。これより

$$\partial_1(D_0(\langle \mathbf{v} \rangle)) = \partial_1(\langle s(\mathbf{v}), t(\mathbf{v}) \rangle) = \langle t(\mathbf{v}) \rangle - \langle s(\mathbf{v}) \rangle$$

が得られる。したがって $\partial_1 \circ D_0 = t_0 - s_0$ である。

また

$$\begin{aligned} D_{q-1}(\partial_q(\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q \rangle)) &= \sum_{i=0}^q (-1)^i D_{q-1}(\langle \mathbf{v}_0, \dots, \widehat{\mathbf{v}}_i, \dots, \mathbf{v}_q \rangle) \\ &= \sum_{i=0}^q \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} \langle s(\mathbf{v}_0), \dots, s(\mathbf{v}_j), t(\mathbf{v}_j), \dots, t(\widehat{\mathbf{v}}_i), \dots, t(\mathbf{v}_q) \rangle \\ &\quad + \sum_{i=0}^q \sum_{j=i+1}^q (-1)^{i+j-1} \langle s(\mathbf{v}_0), \dots, s(\widehat{\mathbf{v}}_i), \dots, s(\mathbf{v}_j), t(\mathbf{v}_j), \dots, t(\mathbf{v}_q) \rangle \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} \partial_{q+1}(D_q(\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q \rangle)) &= \sum_{j=0}^q (-1)^j \partial_{q+1}(\langle s(\mathbf{v}_0), \dots, s(\mathbf{v}_j), t(\mathbf{v}_j), \dots, t(\mathbf{v}_q) \rangle) \\ &= \sum_{j=0}^q \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{i+j} \langle s(\mathbf{v}_0), \dots, s(\widehat{\mathbf{v}}_i), \dots, s(\mathbf{v}_j), t(\mathbf{v}_j), \dots, t(\mathbf{v}_q) \rangle \\ &\quad + \langle t(\mathbf{v}_0), \dots, t(\mathbf{v}_q) \rangle + \sum_{j=1}^q \langle s(\mathbf{v}_0), \dots, s(\mathbf{v}_{j-1}), t(\mathbf{v}_j), \dots, t(\mathbf{v}_q) \rangle \\ &\quad - \sum_{j=0}^{q-1} \langle s(\mathbf{v}_0), \dots, s(\mathbf{v}_j), t(\mathbf{v}_{j+1}), \dots, t(\mathbf{v}_q) \rangle - \langle s(\mathbf{v}_0), \dots, s(\mathbf{v}_q) \rangle \\ &\quad + \sum_{j=0}^q \sum_{i=j+1}^q (-1)^{i+j+1} \langle s(\mathbf{v}_0), \dots, s(\mathbf{v}_j), t(\mathbf{v}_j), \dots, t(\widehat{\mathbf{v}}_i), \dots, t(\mathbf{v}_q) \rangle \\ &= -D_{q-1}(\partial_q(\langle \mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_q \rangle)) + \langle t(\mathbf{v}_0), \dots, t(\mathbf{v}_q) \rangle - \langle s(\mathbf{v}_0), \dots, s(\mathbf{v}_q) \rangle \end{aligned}$$

より、すべての $q > 0$ について

$$\partial_{q+1} \circ D_q + D_{q-1} \circ \partial_q = t_q - s_q$$

を得る。任意の K の q 輪体 z については $\partial_q(z) = 0$ であるから $t_q(z) - s_q(z) = \partial_{q+1}(D_q(z))$ が導かれる。これは $B_q(L)$ の要素であるから $s_*([z]) = t_*([z])$ が得られる。したがって $H_q(K)$ から $H_q(L)$ への準同型として s_* と t_* は等しい ($s_*([z])$ と $t_*([z])$ は同じホモロジー類を表す)。☺

*24 s が単体写像であるから $s(\mathbf{v}_0), \dots, s(\mathbf{v}_j)$ は1つの単体の頂点となり、 $t(\mathbf{v}_j), \dots, t(\mathbf{v}_q)$ も1つの単体の頂点となる。さらに、 s と t が隣接しているので $s(\mathbf{v}_j)$ と $t(\mathbf{v}_j)$ は同じ単体の頂点となるから $\langle s(\mathbf{v}_0), \dots, s(\mathbf{v}_j), t(\mathbf{v}_j), \dots, t(\mathbf{v}_q) \rangle$ は1つの単体を構成する。

3.11 単体的複体の重心分割のホモロジー群

この小節では、ある単体的複体のホモロジー群とその一次重心分割のホモロジー群が同型であることを示す。

単体的複体 K の一次重心分割 K' の頂点は K の単体 σ の重心 $\hat{\sigma}$ であった。また K' の単体は $i = 0, 1, \dots, q$ について σ_{i-1} が σ_i の真の面になっているような K の単体 $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_q$ の重心 $\hat{\sigma}_0, \hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_q$ によって張られる*25。

補題 3.32. K' を単体的複体 K の一次重心分割とする。そのとき K' の頂点から K の頂点への関数 $\zeta : \text{Vert}K' \rightarrow \text{Vert}K$ は、次の条件が成り立つとき、またそのときにのみ $|K|$ (K の多面体) の恒等写像の単体近似である。

ζ は K の各単体の重心をその単体のある頂点に移す。

証明. ζ が $|K|$ の恒等写像の単体近似であれば、各単体 $\sigma \in K$ について $\zeta(\hat{\sigma}) \in \sigma$ でありしたがって $\zeta(\hat{\sigma})$ は σ の頂点である。

逆に ζ が K のあらゆる単体の重心をその単体の頂点に移すと仮定する。 τ を K' の単体とすると、 K' の定義から τ の内部は K のある単体 σ の内部に含まれ、また τ の頂点は σ のある面の重心である。したがって ζ は τ の頂点を σ の頂点に移さなければならず、 ζ は K' から K への単体写像となる。さらに τ の内部は σ に含まれており、 ζ は τ の内部を σ に移すので (単体 σ の頂点は同一の点に移される)、これは恒等写像の単体近似になっている。☺

補題 3.32 より $|K|$ の恒等写像に対する単体近似 $\zeta : K' \rightarrow K$ が存在することがわかった。そのような単体近似は各 $\sigma \in K$ に対して σ の頂点 \mathbf{v}_σ を $\zeta(\hat{\sigma}) = \mathbf{v}_\sigma$ となるように選ぶことによって定義される。

$\zeta : K' \rightarrow K$ と $\theta : K' \rightarrow K$ をともに $|K|$ の恒等写像の単体近似であるとすると補題 3.30 よりこれらは隣接しており、 ζ と θ によって誘導されるホモロジー群の準同型 ζ_* と θ_* は一致する。したがって $|K|$ の恒等写像に対するあらゆる単体近似 $\zeta : K' \rightarrow K$ に対して ζ_* と一致するような自然な準同型 $\nu_K : H_q(K') \rightarrow H_q(K)$ を定義することができる。

次の定理によって単体的複体のホモロジー群とその一次重心分割のホモロジー群が同型であることが示される。

定理 3.33. 任意の単体的複体 K について、自然な準同型 $\nu_K : H_q(K') \rightarrow H_q(K)$ は同型である。

証明. M をある単体 σ とそのすべての面からなる単体的複体であるとすると、 $H_0(M) \cong \mathbb{Z}$, $H_0(M') \cong \mathbb{Z}$, $H_q(M) = H_q(M') = 0 (q > 0)$ が成り立つ (補題 3.21) (M' は K' に対応した M の重心分割)。 \mathbf{v} を M の頂点とすると、 $\theta : M' \rightarrow M$ が $|M|$ の恒等写像の単体近似であれば $\theta(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ である。また、 M の単体 σ の重心を $\tilde{\mathbf{v}}$ とすると、それは M' の頂点であるから θ によって σ の頂点に移される。よって $\theta_* : H_0(M') \rightarrow H_0(M)$ は同型であり、したがってすべての q について $\nu_M : H_q(M') \rightarrow H_q(M)$ は同型である ($q > 0$ については $H_q(M) = H_q(M') = 0$)。

たとえば 1 次元単体 $\sigma = \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1 \rangle$ の重心を $\tilde{\mathbf{v}}$ とすると σ の重心分割 σ' の 0 鎖は

$$c' = n_1 \mathbf{v}_0 + n_2 \tilde{\mathbf{v}} + n_3 \mathbf{v}_1$$

*25 K の各頂点はそれ自身の重心でもある。

と表され、 $\varepsilon' = n_1 + n_2 + n_3$ が定義される。 $\theta(\tilde{\mathbf{v}}) = \mathbf{v}_0$ とすれば c' に対応する M の 0 鎖として

$$c = (n_1 + n_2)\mathbf{v}_0 + n_3\mathbf{v}_1$$

が得られる、これから $\varepsilon = n_1 + n_2 + n_3$ を得る。 ε と ε' は 1 対 1 に対応するので同型である。

K の単体の数に関する帰納法を用いて一般的な場合について定理を証明する。定理が K の (K 自身を除く) 部分複体 (真の部分複体と呼ぶ) について成り立つと仮定する*26。

σ をその次元が K の次元と等しい K の単体であるとする。そのとき σ はそれ以外の K の単体の面ではない。したがって $K \setminus \{\sigma\}$ は K の部分複体である。また M を σ とそのすべての面からなる K の部分複体とする。 $K = M$ の場合に定理が成り立つことは上ですでに証明したから M が K の真の部分複体の場合のみを考える。そのとき $L = K \setminus \{\sigma\}$ とすると $K = L \cup M$ と表せる。

$\zeta: K' \rightarrow K$ を $|K|$ の恒等写像の単体近似とすると、 ζ の $L', M', L' \cap M'$ への制限 $\zeta|_{L'}, \zeta|_{M'}, \zeta|_{L' \cap M'}$ は、それぞれ $|L|, |M|, |L \cap M|$ の恒等写像の単体近似になっている (L', M' はそれぞれ K' に対応した L, M の重心分割である)。したがって次の図式

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_q(L' \cap M') & \longrightarrow & C_q(L') \oplus C_q(M') & \longrightarrow & C_q(K') \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \zeta|_{L' \cap M'} & & \downarrow (\zeta|_{L'}) \oplus (\zeta|_{M'}) & & \downarrow \zeta \\ 0 & \longrightarrow & C_q(L \cap M) & \longrightarrow & C_q(L) \oplus C_q(M) & \longrightarrow & C_q(K) \longrightarrow 0 \end{array}$$

は可換であり、また各系列は完全系列である。 ζ の $L', M', L' \cap M'$ への制限 $\zeta|_{L'}, \zeta|_{M'}, \zeta|_{L' \cap M'}$ はそれぞれ $|L|, |M|, |L \cap M|$ の恒等写像の単体近似であるから自然な準同型 $\nu_L, \nu_M, \nu_{L \cap M}$ を誘導するので、次の可換な図式が得られる。

$$\begin{array}{ccccccc} H_q(L' \cap M') & \longrightarrow & H_q(L') \oplus H_q(M') & \longrightarrow & H_q(K') & \longrightarrow & \\ \downarrow \nu_{L \cap M} & & \downarrow \nu_L \oplus \nu_M & & \downarrow \nu_K & & \\ H_q(L \cap M) & \longrightarrow & H_q(L) \oplus H_q(M) & \longrightarrow & H_q(K) & \longrightarrow & \\ & \xrightarrow{\alpha_q} & H_{q-1}(L' \cap M') & \longrightarrow & H_{q-1}(L') \oplus H_{q-1}(M') & & \\ & & \downarrow \nu_{L \cap M} & & \downarrow \nu_L \oplus \nu_M & & \\ & \xrightarrow{\alpha_q} & H_{q-1}(L \cap M) & \longrightarrow & H_{q-1}(L) \oplus H_{q-1}(M) & & \end{array}$$

上記の図式において、各系列は完全系列であり、また K, K' の分割 $K = L \cup M, K' = L' \cup M'$ に対するマイヤー・ビートリス完全系列になっている。一方、帰納法の仮定によって $\nu_L, \nu_M, \nu_{L \cap M}$ は同型である*27。したがって 5 項補題 (補題 3.25) によって $\nu_K: H_q(K') \rightarrow H_q(K)$ は同型である。☺

同型 $\nu_K: H_q(K') \rightarrow H_q(K)$ を正規同型 (canonical isomorphism) と呼ぶ。これは K' の q 次元ホモロジー群から K の q 次元ホモロジー群への同型写像である。

各 $j > 0$ について K の j 次重心分割 $K^{(j)}$ のホモロジー群から K のホモロジー群への正規同型 $\nu_{K,j}: H_q(K^{(j)}) \rightarrow H_q(K)$ を、 $|K|$ の恒等写像に対する適当な単体近似によって導かれる以下のような自然な同型の合成によって定義する。

$$H_q(K^{(j)}) \longrightarrow H_q(K^{(j-1)}) \longrightarrow \dots \longrightarrow H_q(K') \longrightarrow H_q(K)$$

*26 そのような部分複体の単体の数は K の単体の数より少ない。

*27 $L, M, L \cap M$ はそれぞれ K の真の部分複体であるから。

$i \leq j$ であれば $v_{K,i}^{-1} \circ v_{K,j}$ が $|K|$ の恒等写像の単体近似の合成関数によって導かれる。恒等写像の単体近似の合成関数はそれ自身恒等写像の単体近似であるから (系 2.10), 次の結果が得られる。

補題 3.34. K を単体的複体, i, j を $i \leq j$ を満たす正の整数とすると, $|K|$ の恒等写像に対するある単体近似 $\zeta: K^{(j)} \rightarrow K^{(i)}$ について $v_{K,j} = v_{K,i} \circ \zeta_*$ が成り立つ。

3.12 連続関数と誘導準同型

補題 3.35. 単体的複体 K, L の多面体間の連続写像 $f: |K| \rightarrow |L|$ によって次の条件を満たすホモロジー群の準同型 $f_*: H_q(K) \rightarrow H_q(L)$ が誘導される。

f に対するいかなる単体近似 $s: K^{(i)} \rightarrow L$ についても $f_* = s_* \circ v_{K,i}^{-1}$ が成り立つ。ここで $s_*: H_q(K^{(i)}) \rightarrow H_q(L)$ は単体写像 s によって誘導される準同型であり, $v_{K,i}: H_q(K^{(i)}) \rightarrow H_q(K)$ は正規同型である。

証明. 単体近似定理 (定理 2.11) により充分大きな i について K の j 次重心分割 $K^{(i)}$ 上で定義された f の単体近似 $s: K^{(i)} \rightarrow L$ が存在する。したがって $s: K^{(i)} \rightarrow L$ と $t: K^{(j)} \rightarrow L$ がともに f の単体近似であるときに $s_* \circ v_{K,i}^{-1} = t_* \circ v_{K,j}^{-1}$ が成り立つことを示せばよい。

$i \leq j$ と仮定すると, 補題 3.34 により $|K|$ の恒等写像のある単体近似 $\zeta: K^{(j)} \rightarrow K^{(i)}$ について $v_{K,i}^{-1} \circ v_{K,j} = \zeta_*$ が成り立つ。さらに $\zeta: K^{(j)} \rightarrow K^{(i)}$ は $|K|$ の恒等写像の, $s: K^{(i)} \rightarrow L$ は f のそれぞれ単体近似であるから $s \circ \zeta: K^{(j)} \rightarrow L$ は $f: |K| \rightarrow |L|$ の単体近似である (系 2.10), そうすると $s \circ \zeta$ と t とは同じ関数の単体近似ということになるから, 補題 3.10 により $K^{(j)}$ から L への互いに隣接した単体写像である。したがって, 補題 3.31 により $(s \circ \zeta)_*$ と t_* は $H_q(K^{(j)})$ から $H_q(L)$ への準同型として一致する。よって $s_* \circ v_{K,i}^{-1} = t_* \circ v_{K,j}^{-1}$ を得る。

☺

補題 3.36. K, L, M を単体的複体, $f: |K| \rightarrow |L|, g: |L| \rightarrow |M|$ を連続関数とすると, $f, g, g \circ f$ によって誘導されるホモロジー群の準同型 $f_*, g_*, (g \circ f)_*$ について $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ が成り立つ。

証明. $t: L^{(m)} \rightarrow M$ を g の単体近似, $s: K^{(j)} \rightarrow L^{(m)}$ を f の単体近似とすると, $|L|$ の恒等写像に対する単体近似によって $H_q(L^{(m)})$ から $H_q(L)$ への正規同型 $v_{L,m}$ が導かれる。したがって $v_{L,m} \circ s_*$ が f に対するある単体近似によって誘導される (系 2.10)。よって $f_* = v_{L,m} \circ s_* \circ v_{K,j}^{-1}$ である。また $g_* = t_* \circ v_{L,m}^{-1}$ である。これらから $g_* \circ f_* = t_* \circ s_* \circ v_{K,j}^{-1}$ が得られる。一方 $t \circ s: K^{(j)} \rightarrow M$ は $g \circ f$ の単体近似であるから $(g \circ f)_* = t_* \circ s_*$ を得る。

☺

系 3.37. 単体的複体 K, L の多面体 $|K|, |L|$ が同相であれば K と L のホモロジー群は同型である。

証明. $h: |K| \rightarrow |L|$ を同相写像とすると, $h_*: H_q(K) \rightarrow H_q(L)$ は同型であり, その逆写像は $(h_*^{-1}): H_q(L) \rightarrow H_q(K)$ である。

☺

誘導準同型を用いることによって Brouwer の不動点定理 (『位相数学の基礎』定理 2.14) を Sperner の補題を使わずに証明することができる。ブラウワーの不動点定理は, 「 n 次元単体 Δ^n からその境界 $\partial\Delta^n$ への連続関数 $r: \Delta^n \rightarrow \partial\Delta^n$ で, すべての $\mathbf{x} \in \partial\Delta^n$ について $r(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ を満たすものはない」という事実 (『位相数学の基礎』補題 2.13) から導かれるが, これは以下のようにして示される。そのような連続関数はすべての $q > 0$ に対してホモロジー群の準同型 $r_*: H_q(\Delta^n) \rightarrow H_q(\partial\Delta^n)$ を導き, $i_*: H_q(\partial\Delta^n) \rightarrow H_q(\Delta^n)$ を包含写

像 $i : \partial\Delta^n \rightarrow \Delta^n$ によって誘導される準同型とすると, $r_* \circ i_*$ はすべての q についてホモロジー群 $H_q(\partial\Delta)$ の恒等写像となる。これはすべての q について $r_* : H_q(\Delta) \rightarrow H_q(\partial\Delta)$ が全射であることを意味する。しかし, $n \geq 2$ について $H_{n-1}(\Delta^n) = 0, H_{n-1}(\partial\Delta^n) \cong \mathbb{Z}$ であるからそれは不可能である*28。したがって $\partial\Delta$ のすべての点を動かさないような連続関数 $r : \Delta^n \rightarrow \partial\Delta^n$ は存在せずブラウワーの不動点定理が得られる。この定理は, 三角形分割可能性 (単体的複体と位相空間の同相性) を用いれば n 次元球から $n-1$ 次元球面への関数に自然に拡張される。

次に単体的複体が構成する多面体の間のホモトピックな関数が同じホモロジー群の準同型を導くことを示す。そのために次の結果を必要とする。

補題 3.38. どのような単体的複体 L についても, 次の条件を満たすある $\varepsilon > 0$ がある。

ある単体的複体 K の多面体上で定義された連続関数 $f : |K| \rightarrow |L|$ と $g : |K| \rightarrow |L|$ について, すべての $\mathbf{x} \in |K|$ において $f(\mathbf{x})$ と $g(\mathbf{x})$ との距離が ε 以内であれば, 充分大きな j について $K^{(j)}$ で定義される単体写像で f, g 両方の単体近似となるものが存在する。

証明. Lebesgue の補題 (『位相数学の基礎』補題 1.48) を適用すると, 任意の $|L|$ の点について半径 2ε の開球が L のある点 \mathbf{b} の星状体 $st_L(\mathbf{b})$ に含まれるような $\varepsilon > 0$ が存在する*29。 $f : |K| \rightarrow |L|, g : |K| \rightarrow |L|$ を連続関数とし, すべての $\mathbf{x} \in |K|$ について $f(\mathbf{x})$ が $g(\mathbf{x})$ から ε 以内の距離にあるものと仮定する。再び (半径 ε の開球の原像による $|K|$ の開被覆に関する) Lebesgue の補題によって, 直径が δ より小さい $|K|$ の部分集合 S が f によって $|L|$ のある点の半径 ε の開球に移され, g によってその点の半径 2ε の開球に移されるような $\delta > 0$ が存在する。そのとき L のある点 \mathbf{b} について $f(S) \subset st_L(\mathbf{b}), g(S) \subset st_L(\mathbf{b})$ である。 i を $\mu(K^{(i)}) < \frac{1}{2}\delta$ となるように選ぶと, 単体近似定理 (定理 2.11) の証明から, $K^{(i)}$ の各頂点 \mathbf{a} について $st_{K^{(i)}}(\mathbf{a})$ の直径は δ より小さく, また L のある頂点 $s(\mathbf{a})$ について $f(st_{K^{(i)}}(s(\mathbf{a}))) \subset st_L(s(\mathbf{a})), g(st_{K^{(i)}}(s(\mathbf{a}))) \subset st_L(s(\mathbf{a}))$ が成り立つ。したがって補題 2.9 により, このようにして作られた関数 $s : Vert K^{(i)} \rightarrow Vert L$ は f, g の単体近似である。 ☺

定理 3.39. K, L を単体的複体とし, $f : |K| \rightarrow |L|, g : |K| \rightarrow |L|$ を $|K|$ から $|L|$ への連続関数とする。 f と g がホモトピックであれば, すべての q について $H_q(K)$ から $H_q(L)$ への誘導準同型 f_* と g_* は等しい。

証明. $F : |K| \times [0, 1] \rightarrow |L|$ を $F(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}), F(\mathbf{x}, 1) = g(\mathbf{x})$ を満たすホモトピー, $\varepsilon > 0$ とする。コンパクトな距離空間における連続関数は一様連続であるから, $|s-t| < \delta$ ならば $F(\mathbf{x}, s)$ と $F(\mathbf{x}, t)$ との距離が ε より小さくなるような δ が存在する。 $i = 0, 1, 2, \dots, r$ について t_0, t_1, \dots, t_r を $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1$ および $t_i - t_{i-1} < \delta$ が成り立つように選び, $f_i(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, t_i)$ とおくと, すべての $\mathbf{x} \in |K|$ について $f_{i-1}(\mathbf{x})$ と $f_i(\mathbf{x})$ との距離は ε 以内である。補題 3.38 より, ε を充分小さくとれば f_{i-1} と f_i は共通の単体近似を持つので, それらによって誘導されるホモロジー群の準同型は同一である。したがって f と g とは同じホモロジー群の準同型を誘導する。 ☺

3.13 ホモロジー群のホモトピー型不変性

定義 3.9 (ホモトピー同値). X, Y を位相空間とする。連続写像 $f : X \rightarrow Y$ に対して連続写像 $g : Y \rightarrow X$ があって合成写像 $g \circ f$ が X の恒等写像にホモトピックであり, かつ $f \circ g$ が Y の恒等写像にホモトピックであ

*28 $n = 1$ のときには $H_{n-1}(\Delta^n) \cong \mathbb{Z}, H_{n-1}(\partial\Delta^n) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ である。
 *29 L のすべての点 \mathbf{b} の星状体 $st_L(\mathbf{b})$ の和集合は L の開被覆を構成する。

るとき f は (g も) ホモトピー同値写像であると言う。また、そのとき X と Y はホモトピー同値 (homotopy equivalent) である (あるいはホモトピー型が等しい) と言う。

補題 3.40. ホモトピー同値写像の合成写像もホモトピー同値写像である。

証明. X, Y, Z を位相空間とし, $f: X \rightarrow Y, h: Y \rightarrow Z$ をホモトピー同値写像であるとする, id_X, id_Y, id_Z を X, Y, Z の恒等写像として $g \circ f \simeq id_X, f \circ g \simeq id_Y, k \circ h \simeq id_Y, h \circ k \simeq id_Z$ を満たすような連続写像 $g: Y \rightarrow X, k: Z \rightarrow Y$ が存在する。そのとき

$$(g \circ k) \circ (h \circ f) = g \circ (k \circ h) \circ f \simeq g \circ id_Y \circ f = g \circ f \simeq id_X$$

であり

$$(h \circ f) \circ (g \circ k) = h \circ (f \circ g) \circ k \simeq h \circ id_Y \circ k = h \circ k \simeq id_Z$$

となるから $h \circ f: X \rightarrow Z$ は X から Z へのホモトピー同値写像である。☺

補題 3.41. $f: |K| \rightarrow |L|$ を単体的複体 K の多面体 $|K|$ から単体的複体 L の多面体 $|L|$ へのホモトピー同値写像とする。そのときすべての負でない整数 q について f によるホモロジー群の誘導準同型 $f_*: H_q(K) \rightarrow H_q(L)$ は同型である。

証明. 仮定より $g \circ f$ が $|K|$ の恒等写像にホモトピックで, $f \circ g$ が $|L|$ の恒等写像にホモトピックであるような連続写像 $g: |L| \rightarrow |K|$ が存在する。したがって誘導準同型 $(g \circ f)_*: H_q(K) \rightarrow H_q(K)$, $(f \circ g)_*: H_q(L) \rightarrow H_q(L)$ は各 q について $H_q(K)$ および $H_q(L)$ の恒等写像である (したがって同型)。一方 $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$, $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ であるから $f_*: H_q(K) \rightarrow H_q(L)$ は同型であり, $g_*: H_q(L) \rightarrow H_q(K)$ はその逆写像となる。☺

定義 3.10. 位相空間 X の部分集合 A は次の条件を満たすとき変形レトラクト (deformation retract) であると言う。

すべての $x \in X$ について $H(x, 0) = x$, $H(x, 1) \in A$ を満たし, すべての $a \in A$ について $H(a, 1) = a$ を満たすような連続関数 $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$ が存在する。

例 3.7. n 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^n における $n-1$ 次元球面 S^{n-1} (n 次元球 D^n の表面) は $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (\mathbb{R}^n から原点だけを取り除いたもの) の変形レトラクトである。

すべての $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ と $t \in [0, 1]$ について

$$H(\mathbf{x}, t) = (1-t + t/|\mathbf{x}|)\mathbf{x}$$

とおくと $H(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}$ かつ $H(\mathbf{x}, 1) \in S^{n-1}$ が成り立ち, また $\mathbf{x} \in S^{n-1}$ を満たす \mathbf{x} については $H(\mathbf{x}, 1) = \mathbf{x}$ である。

3.14 単体的複体の積空間

まず初めに結について説明する。

定義 3.11 (結). X を \mathbb{R}^n の図形, \mathbf{a} を \mathbb{R}^n の点とする。 X の任意の点 \mathbf{x} に対して \mathbf{a} と \mathbf{x} を結ぶ線分を $\overline{\mathbf{a}\mathbf{x}}$ と表すと, つねに $\overline{\mathbf{a}\mathbf{x}} \cap X = \mathbf{x}$ であるとき, すべての \mathbf{x} について $\overline{\mathbf{a}\mathbf{x}}$ を考え, その上にある点全体の集合を $\mathbf{a} * X$ と表して \mathbf{a} と X の結 (join) と言う。すなわち

$$\mathbf{a} * X = \{y : y \in \overline{\mathbf{a}\mathbf{x}}, \mathbf{x} \in X\}$$

である。

たとえば $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{q-1}$ が構成する単体 $\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{q-1} \rangle$ の多面体に対して $\mathbf{a} * |\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{q-1} \rangle| = |\langle \mathbf{a}, \mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_{q-1} \rangle|$ である。より簡単な例として、2 点を結ぶ線分 $|\sigma|$ に対してその線分（とその延長）に含まれない点 \mathbf{a} をとると $\mathbf{a} * |\sigma|$ は三角形となる。また三角形を $|\sigma|$ とし、その三角形と同一の平面に含まれない点 \mathbf{a} をとると $\mathbf{a} * |\sigma|$ は四面体である。

\mathbb{R}^n の単体的複体 K と $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ との積空間 $K \times I$ を考え、これも単体的複体となることを示そう。 K の単体 $\sigma = \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \rangle$ について $\sigma \times I$ における点 $(\mathbf{v}_i, 0), (\mathbf{v}_i, 1)$ を $\underline{\mathbf{v}}_i, \bar{\mathbf{v}}_i$ で表すと $r + 2$ 個の点

$$\underline{\mathbf{v}}_0, \underline{\mathbf{v}}_1, \dots, \underline{\mathbf{v}}_{j-1}, \underline{\mathbf{v}}_j, \bar{\mathbf{v}}_j, \bar{\mathbf{v}}_{j+1}, \dots, \bar{\mathbf{v}}_r$$

は幾何学的に独立である。これは次のようにして確認できる。

$$\lambda_1(\underline{\mathbf{v}}_1 - \underline{\mathbf{v}}_0) + \dots + \lambda_j(\underline{\mathbf{v}}_j - \underline{\mathbf{v}}_0) + \kappa_j(\bar{\mathbf{v}}_j - \underline{\mathbf{v}}_0) + \dots + \kappa_r(\bar{\mathbf{v}}_r - \underline{\mathbf{v}}_0) = \mathbf{0}$$

とおくと、もともとの各点の座標と 0, 1 の部分に分けて

$$\begin{aligned} \lambda_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0) + \dots + \lambda_{j-1}(\mathbf{v}_{j-1} - \mathbf{v}_0) + (\lambda_j + \kappa_j)(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_0) \\ + \kappa_{j+1}(\mathbf{v}_{j+1} - \mathbf{v}_0) + \dots + \kappa_r(\mathbf{v}_r - \mathbf{v}_0) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

および

$$\kappa_j + \dots + \kappa_r = 0$$

が得られる。 $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_r$ が幾何学的に独立であることより、 $\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \kappa_{j+1}, \dots, \kappa_r$ はすべて 0 であり、 $\lambda_j + \kappa_j = 0$ であるから $\kappa_j = 0$ ならば $\lambda_j = 0$ が得られる。

したがって $r + 1$ 次元の単体 $\langle \underline{\mathbf{v}}_0, \dots, \underline{\mathbf{v}}_{j-1}, \underline{\mathbf{v}}_j, \bar{\mathbf{v}}_j, \dots, \bar{\mathbf{v}}_r \rangle$ が定まる。このようにして得られる $r + 1$ 個の単体

$$\langle \underline{\mathbf{v}}_0, \dots, \underline{\mathbf{v}}_{j-1}, \underline{\mathbf{v}}_j, \bar{\mathbf{v}}_j, \dots, \bar{\mathbf{v}}_r \rangle \quad (0 \leq j \leq r)$$

およびそれらの面全体を $K(\sigma \times I)$ で表す。

補題 3.42. $K(\sigma \times I)$ は単体的複体で、その多面体 $|K(\sigma \times I)|$ は $\sigma \times I$ に等しい。

証明. σ の次元に関する帰納法で証明する。 $r = 0$ の場合 $\langle \mathbf{v}_0 \rangle \times I$ は線分になるからそれ自体単体であり、 $r = 1$ の場合には $\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1 \rangle \times I$ は長方形になるので 2 つの三角形に分割できるから補題の結論が成り立つ。 $r - 1$ 次元の場合にも結論が成り立つと仮定し r 次元の場合を示す。単体的複体の条件は

- (1). σ が K に属する単体であるならば、 σ のすべての面も K に属している。
- (2). σ_1, σ_2 を K に属する単体とすると、 $\sigma_1 \cap \sigma_2$ (σ_1 と σ_2 の共通部分) は空集合である (σ_1 と σ_2 には共通部分がない) か、あるいは $\sigma_1 \cap \sigma_2$ は σ_1 と σ_2 両方の面になっている。

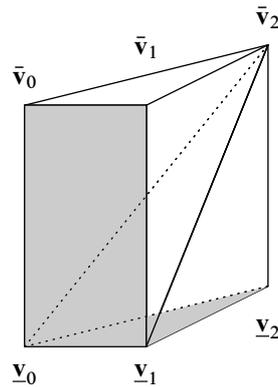
であった。(1) は明らかに成り立つから (2) を示せばよい。 $\sigma' = \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{r-1} \rangle, \sigma'' = \langle \underline{\mathbf{v}}_0, \underline{\mathbf{v}}_1, \dots, \underline{\mathbf{v}}_r \rangle$ として

$$L = K(\sigma' \times I) \cup K(\sigma'')$$

とする。帰納法の仮定により $K(\sigma' \times I)$ は単体的複体であり、 $K(\sigma'')$ はそれ自身単体である。また

$$\bar{\mathbf{v}}_r * |L| = \sigma \times I$$

である。例えば $\sigma = \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ とすると次の図で網掛けをした部分が $|L|$ であり、 $\sigma \times I$ 全体が $\bar{\mathbf{v}}_2$ と $|L|$ との結になっている。



$K(\sigma \times I)$ の 2 つの単体 τ, τ' についてそれらの共通部分を考える。 $\tau \cap \tau' \neq \emptyset$ とすると、 τ, τ' のいずれかが L の単体であれば (L は単体的複体であるから) $\tau \cap \tau'$ も L の単体であり、したがって $K(\sigma \times I)$ の単体である。 τ, τ' のいずれもが L に属さないときは、 $\sigma \times L$ が \bar{v}_r と $|L|$ との結であることより τ, τ' は \bar{v}_r をその頂点に持つ単体であり、 τ_0, τ'_0 を L の単体として $\tau = \bar{v}_r * \tau_0, \tau' = \bar{v}_r * \tau'_0$ と書ける。したがって $\tau \cap \tau' = \bar{v}_r * (\tau_0 \cap \tau'_0)$ であるから $\tau \cap \tau'$ は τ, τ' の面となる。以上によって単体的複体の条件の (2) が示された。

$K(\sigma \times I) - L$ に属する単体は \bar{v}_r を頂点として持つので

$$|K(\sigma \times I)| = \bar{v}_r \times |L|$$

より

$$|K(\sigma \times I)| = \sigma \times I$$

が得られる。 ☺

単体的複体 K のすべての頂点に順序をつけ、それを \lt で表す。 K のある単体 σ を頂点を並べて表すとき

$$\sigma = \langle v_0, v_1, \dots, v_r \rangle \quad (v_0 \lt v_1 \lt \dots \lt v_r)$$

のように与えられた順序に従って並べることにする。このようにして各単体 $\sigma \in K$ に対して $K(\sigma \times I)$ を考える。このとき単体 σ' が σ の面であるならば、 $K(\sigma' \times I)$ は $K(\sigma \times I)$ の部分複体である。

$$K \times I = \cup_{\sigma \in K} K(\sigma \times I)$$

として次の結果を得る。

補題 3.43. $K \times I$ は単体的複体で $|K \times I| = |K| \times I$ である。

証明. $K \times I$ が単体的複体の条件 (2) を満たすことを示す。 τ, τ' を $K \times I$ の単体として $\tau \in K(\sigma \times I), \tau' \in K(\sigma' \times I)$ とする。 $\sigma \cap \sigma' = \emptyset$ ならば $\tau \cap \tau' = \emptyset$ である。逆に $\tau \cap \tau' \neq \emptyset$ ならば $\sigma \cap \sigma' \neq \emptyset$ であり、 $\tau \cap \tau' \in K((\sigma \cap \sigma') \times I)$ である。 $K((\sigma \cap \sigma') \times I)$ は $K(\sigma \times I)$ と $K(\sigma' \times I)$ の部分複体であるから $\tau \cap \tau'$ は τ および τ' の面である。 ☺

このようにして定義された $K \times I$ に対して $|K| \times 1$ 上にある単体の全体を \bar{K} 、 $|K| \times 0$ 上にある単体の全体を \underline{K} とすると (すべての i について) \bar{v}_i と v_i を同一視し、また \bar{v}_i と v_i を同一視することによって \bar{K} と K が同一視され、また \underline{K} と K が同一視される。

3.15 位相空間のホモロジー群

位相空間 X とユークリッド空間における単体的複体 K の多面体 $|K|$ との間に同相写像 $h: |K| \rightarrow X$ があるとき, (K, h) を X の三角形分割 (単体分割とも言う) と呼んだが, 三角形分割可能な位相空間については, それと同相な単体的複体のホモロジー群をもってその位相空間のホモロジー群と定義する. 同相な単体的複体同士は同型のホモロジー群を持つので, ある位相空間についてどのような三角形分割を考えてもホモロジー群は互いに同型である。

例 3.8 (球と球面のホモロジー群). n 次元の球 D^n は n 次元単体 Δ^n とそのすべての面からなる単体的複体 $K(\Delta^n)$ の多面体と同相であるから, $K(\Delta^n)$ によって三角形分割される. したがって D^n のホモロジー群は $K(\Delta^n)$ (これは連結な単体的複体である) のホモロジー群と同型であり

$$H_0(D^n) \cong \mathbb{Z}$$

および

$$H_q(D^n) = 0 \quad (q > 0)$$

が得られる。

$n-1$ 次元の球面 S^{n-1} は $K(\Delta^n)$ から Δ 自身を取り除いた単体的複体 $K(\partial\Delta^n)$ の多面体と同相であるから, そのホモロジー群は $K(\partial\Delta^n)$ のホモロジー群と同型である. したがって

$$H_0(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$$

$$H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$$

および

$$H_q(S^{n-1}) = 0 \quad (q > 0, q \neq n-1)$$

を得る。

区間 I の n 個の積空間 $I \times \cdots \times I$ は n 次元の立方体であり, n 次元球 D^n と同相である^{*30}. したがって n 次元球面 S^n と I^n との積空間 $S^n \times I^n$ は n 次元球面 S^n と n 次元球 D^n の積空間 $S^n \times D^n$ と同相である. S^n は $n+1$ 次元単体 Δ^{n+1} の境界 $(\partial\Delta^{n+1})$ と同相であるから三角形分割可能であった. また補題 3.43 により $\partial\Delta^{n+1} \times I$ は単体的複体であるから, それと同相な $S^n \times I$ は三角形分割可能である. さらに $S^n \times I$ と同相な単体的複体を K とすると $K \times I$ は単体的複体であるから $S^n \times I \times I = S^n \times I^2$ は三角形分割可能であり, 帰納的に $S^n \times I^m$ が三角形分割可能となり, それと同相な $S^n \times D^m$ も三角形分割可能となる ($m \geq 2$). 以上の議論をもとに $S^n \times S^m$ の三角形分割を考える。

K を $S^n \times S^m$ と同相な単体的複体とする. m 次元球面 S^m を, その中心を通る超平面によって上下 2 つに分けるとそれぞれは m 次元球 D^m と同相となり^{*31}, 各々を D_+^m, D_-^m と書けば $S^n \times S^m = (S^n \times D_+^m) \cup (S^n \times D_-^m)$ となる. $S^n \times D_+^m, S^n \times D_-^m$ は三角形分割可能であるから $S^n \times S^m$ は三角形分割可能である. さらにこれから $S^n \times S^n \times D^m$ が三角形分割可能となり, それによって $S^n \times S^n \times S^m$ が三角形分割可能であることが導か

^{*30} 球を適当に拡大し, 立方体を適当に縮小して球の中心と立方体の中心が一致し立方体が球の中に入るようにして中心から直線を引けば, 球と立方体との同相写像が得られる。

^{*31} たとえば 2 次元球面 S^2 (通常の球面) を中心を通る平面で切ると上下 2 つに分かれるが, それぞれは曲がった円と見なすことができ 2 次元の球, すなわち円と同相である。

れ、帰納的に $q-1$ ($q \geq 2$) 個の n 次元球面の積空間と S^m との積空間 $S^n \times \cdots \times S^n \times S^m$ も三角形分割可能である。以下では $S^n \times \cdots \times S^n$ (q 個) を $(S^n)^q$ と書き、また $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$ (q 個) を \mathbb{Z}^q と書くことにする。

以上をもとにまず次の結果を示す。

定理 3.44. $n \geq 1, m \geq 1, m \leq n, r \leq n$ として、 $m \neq n$ ($m < n$) ならば

$$H_r(S^n \times S^m) \cong \mathbb{Z} \quad (r = 0, m, n \text{ のとき})$$

$$H_r(S^n \times S^m) = 0 \quad (r \neq 0, m, n \text{ のとき})$$

また、 $m = n$ のとき

$$H_r(S^n \times S^n) \cong \mathbb{Z} \quad (r = 0 \text{ のとき})$$

$$H_r(S^n \times S^n) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \quad (r = n \text{ のとき})$$

$$H_r(S^n \times S^n) = 0 \quad (r \neq 0, n \text{ のとき})$$

証明. 帰納法で証明する。初めに $H_r(S^n \times S^1)$ を計算する。 $S^1 = D_+^1 \cup D_-^1$ だから^{*32}, $S^n \times S^1 = (S^n \times D_+^1) \cup (S^n \times D_-^1)$ である。これらはそれぞれ $S^n \times I$ と同相 (I は 1 次元の単位区間 $[0, 1]$ である) であって三角形分割可能である。 $|(S^n \times D_+^1) \cap (S^n \times D_-^1)| = S^n \times S^0 = (S^n \times \{-1\}) \cup (S^n \times \{1\})$ となるが、 $S^n \times \{-1\}, S^n \times \{1\}$ はそれぞれ連結な空間の積空間としてそれぞれ自身連結であり (定理 3.15), またこの 2 つの空間の間に共通部分はないので補題 3.17 より, すべての r について

$$H_r(S^n \times S^0) = H_r(S^n \times \{-1\}) \oplus H_r(S^n \times \{1\})$$

である。ここで次のマイヤー・ビートリス完全系列を考える。

$$\begin{aligned} & \cdots \xrightarrow{\alpha_{r+1}} H_r(S^n \times \{-1\}) \oplus H_r(S^n \times \{1\}) \longrightarrow \\ & \xrightarrow{k_*} H_r(S^n \times D_+^1) \oplus H_r(S^n \times D_-^1) \xrightarrow{w_*} H_r(S^n \times S^1) \longrightarrow \\ & \xrightarrow{\alpha_r} H_{r-1}(S^n \times \{-1\}) \oplus H_{r-1}(S^n \times \{1\}) \xrightarrow{k_*} \cdots \end{aligned}$$

$S^n \times \{-1\}, S^n \times \{1\}$ は S^n と同相であり, $S^n \times D_+^1, S^n \times D_-^1$ は S^n にホモトピックであるから $H_n(S^n \times \{-1\}) \cong H_n(S^n \times \{1\}) \cong H_n(S^n \times D_+^1) \cong H_n(S^n \times D_-^1) \cong H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ である。

$n \geq 2$ とする。 $r = 1$ については $H_1(S^n) = 0, H_0(S^n) \cong \mathbb{Z}$ より完全系列

$$\begin{aligned} 0 & \xrightarrow{w_1} H_1(S^n \times S^1) \xrightarrow{\alpha_1} H_0(S^n \times \{-1\}) \oplus H_0(S^n \times \{1\}) (\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \longrightarrow \\ & \xrightarrow{k_0} H_0(S^n \times D_+^1) \oplus H_0(S^n \times D_-^1) (\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

が得られる。 α_1 は単射となるので $\ker \alpha_1 = 0$ であるから準同型定理により

$$H_1(S^n \times S^1) / \ker \alpha_1 = H_1(S^n \times S^1) \cong \text{image } \alpha_1 = \ker k_0$$

を得る。ここで $\ker k_0 \cong \mathbb{Z}$ を示す。

^{*32} S^1 は円周, D_+^1, D_-^1 は円周を 2 つに切ってきた半円周と同相な線分である。

$h \in H_0(S^n)$ とすると $h \times \{-1\} \in H_0(S^n \times \{-1\})$ と $h \times \{1\} \in H_0(S^n \times \{1\})$ とは異なるホモロジー類に属する要素であるが, D_+^1 においては $\{-1\}$ と $\{1\}$ とを結ぶ 1 次元単体の列が存在するので, これらは $H_0(S^n \times D_+^1)$ において同一のホモロジー類に属する。 $H_0(S^n \times D_-^1)$ についても同様のことが成り立つ。したがって $\text{image } k_0 \cong \mathbb{Z}$ であり, 準同型定理によって $\ker k_0 \cong \mathbb{Z}$ である。

これにより $H_1(S^n \times S^1) \cong \mathbb{Z}$ となる。

$r = n$ については $H_{n-1}(S^n) = 0$ より完全系列

$$\begin{aligned} & H_n(S^n \times \{-1\}) \oplus H_n(S^n \times \{1\}) (\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \longrightarrow \\ & \xrightarrow{k_n} H_n(S^n \times D_+^1) \oplus H_n(S^n \times D_-^1) (\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \xrightarrow{w_n} H_n(S^n \times S^1) \xrightarrow{\alpha_n} 0 \end{aligned}$$

が得られる。このとき w_n が全射となるので $\text{image } w_n = H_n(S^n \times S^1)$ となり準同型定理を用いて

$$H_n(S^n \times S^1) \cong (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) / \ker w_n \cong (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) / \text{image } k_n$$

を得る。ここで $\text{image } k_n \cong \mathbb{Z}$ を示す。

$h \in H_n(S^n)$ とすると $h \times \{-1\} \in H_n(S^n \times \{-1\})$ と $h \times \{1\} \in H_n(S^n \times \{1\})$ とは異なるホモロジー類に属する要素であるが, D_+^1 においては $\{-1\}$ と $\{1\}$ とを結ぶ 1 次元単体の列が存在するので, これらは $H_n(S^n \times D_+^1)$ において同一のホモロジー類に属する。 $H_n(S^n \times D_-^1)$ についても同様のことが成り立つ。したがって $\text{image } k_n \cong \mathbb{Z}$ である。

したがって $H_n(S^n \times S^1) \cong \mathbb{Z}$ を得る。

同様の議論によって $r = 0$ の場合には

$$H_0(S^n \times S^1) \cong (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) / \ker w_0 \cong (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) / \text{image } k_0$$

より $H_0(S^n \times S^1) \cong \mathbb{Z}$ が得られる。

$r \neq 0, 1, n$ の場合は $H_r(S^n) = 0$ および $H_{r-1}(S^n) = 0$ なので完全系列

$$0 \xrightarrow{w_r} H_r(S^n \times S^1) \xrightarrow{\alpha_r} 0$$

より w_r も α_r も同型となって $H_r(S^n \times S^1) = 0$ が導かれる。

次に $n = 1$ の場合を考える。 $r = 1$ のときは次の完全系列が得られる。

$$\begin{aligned} & H_1(S^1 \times \{-1\}) \oplus H_1(S^1 \times \{1\}) (\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \longrightarrow \\ & \xrightarrow{k_1} H_1(S^1 \times D_+^1) \oplus H_1(S^1 \times D_-^1) (\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \xrightarrow{w_1} H_1(S^1 \times S^1) \longrightarrow \\ & \xrightarrow{\alpha_1} H_0(S^1 \times \{-1\}) \oplus H_0(S^1 \times \{1\}) (\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \xrightarrow{k_0} H_0(S^1 \times D_+^1) \oplus H_0(S^1 \times D_-^1) (\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

準同型定理によって $H_1(S^1 \times S^1) / \ker \alpha_1 = H_1(S^1 \times S^1) / \text{image } w_1 \cong \text{image } \alpha_1 = \ker k_0 \cong \mathbb{Z}$ となる ($\ker k_0 \cong \mathbb{Z}$ は上で示した)。また, やはり準同型定理によって $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) / \ker w_1 = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) / \text{image } k_1 \cong \text{image } w_1$ が得られ, さらに $\text{image } k_1 \cong \mathbb{Z}$ ($\text{image } k_n \cong \mathbb{Z}$ と同様にして求められる) より $\text{image } w_1 \cong \mathbb{Z}$ となる。よって $H_1(S^1 \times S^1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ を得る。

$r = 0$ の場合は上で示した $n \geq 2$ の場合と同様の議論によって $H_0(S^1 \times S^1) \cong \mathbb{Z}$ が得られる。

$S^n \times S^{m-1}$ について上記の事実が成り立つと仮定して $S^n \times S^m$ の場合を考える。 $S^m = D_+^m \cup D_-^m$ だから $S^n \times S^m = (S^n \times D_+^m) \cup (S^n \times D_-^m)$ であり, これらは三角形分割可能である。また, $|(S^n \times D_+^m) \cap (S^n \times D_-^m)| = S^n \times S^{m-1}$ である。ここで次のマイヤー・ビートリス完全系列を考える。

$$\dots \xrightarrow{\alpha_{r+1}} H_r(S^n \times S^{m-1}) \xrightarrow{k_*} H_r(S^n \times D_+^m) \oplus H_r(S^n \times D_-^m) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{w_*} H_r(S^n \times S^m) \xrightarrow{\alpha_r} H_{r-1}(S^n \times S^{m-1}) \xrightarrow{k_*} \dots$$

$S^n \times D_+^m$, $S^n \times D_-^m$ はそれぞれ S^n とホモトピックであるから、それらのホモロジー群は S^n のホモロジー群と同型である。

$r \neq 0, m, n$ のときは帰納法の仮定より $H_{r-1}(S^n \times S^{m-1}) = 0$ であり、また $H_r(S^n) = 0$ であるから完全系列

$$0 \xrightarrow{w_r} H_r(S^n \times S^m) \xrightarrow{\alpha_r} 0$$

が得られ、 w_r も α_r も同型となって $H_r(S^n \times S^m) = 0$ を得る。

$m \neq n$ と仮定して $r = n$ の場合を考えると、 $H_n(S^n \times S^{m-1}) \cong \mathbb{Z}$, $H_{n-1}(S^n \times S^{m-1}) = 0$ より完全系列

$$H_n(S^n \times S^{m-1})(\cong \mathbb{Z}) \xrightarrow{k_n} H_n(S^n \times D_+^m) \oplus H_n(S^n \times D_-^m)(\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \xrightarrow{w_n} H_n(S^n \times S^m) \xrightarrow{\alpha_n} 0$$

が得られる。このとき w_n が全射となるので $\text{image } w_n = H_n(S^n \times S^m)$ より準同型定理を用いて

$$H_n(S^n \times S^m) \cong (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) / \ker w_n \cong (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) / \text{image } k_n$$

を得る。上記の $m = 1$ の場合と同様にして $\text{image } k_n \cong \mathbb{Z}$ が示されるので $H_n(S^n \times S^m) \cong \mathbb{Z}$ が得られる。

$r = 0$ についても $m = 1$ の場合と同様にして $H_0(S^n \times S^m) \cong \mathbb{Z}$ を得る。

$r = m$ のときは $H_m(S^n) = 0$, $H_{m-1}(S^n) = 0$ より完全系列

$$0 \xrightarrow{w_m} H_m(S^n \times S^m) \xrightarrow{\alpha_m} H_{m-1}(S^n \times S^{m-1})(\cong \mathbb{Z}) \xrightarrow{k_{m-1}} 0$$

が得られる。 α_m は同型となるので

$$H_m(S^n \times S^m) \cong \mathbb{Z}$$

である。

次に $m = n$ の場合を考える。 $r = 0$, $r \neq 0, n$ については上記の $m = 1$ および $m \neq n$ の場合と同様にして $H_0(S^n \times S^n) \cong \mathbb{Z}$, $H_r(S^n \times S^n) = 0 (r \neq 0, n)$ が示される。最後に $r = n$ とする。このとき次の完全系列が得られる。

$$\begin{aligned} H_n(S^n \times S^{n-1})(\cong \mathbb{Z}) &\xrightarrow{k_n} H_n(S^n \times D_+^n) \oplus H_n(S^n \times D_-^n)(\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \xrightarrow{w_n} H_n(S^n \times S^n) \longrightarrow \\ &\xrightarrow{\alpha_n} H_{n-1}(S^n \times S^{n-1})(\cong \mathbb{Z}) \xrightarrow{k_{n-1}} 0 \end{aligned}$$

α_n が全射であるから $\text{image } \alpha_n \cong \mathbb{Z}$ である。したがって準同型定理により $H_n(S^n \times S^n) / \ker \alpha_n = H_n(S^n \times S^n) / \text{image } w_n \cong \mathbb{Z}$ である。さらに準同型定理によって $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) / \ker w_n \cong \text{image } w_n$ であるが、 $\ker w_n = \text{image } k_n \cong \mathbb{Z}$ より $\text{image } w_n \cong \mathbb{Z}$ となり $H_n(S^n \times S^n) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ が得られる。☺

この結果を踏まえて次の補題を示す。

補題 3.45. $n \geq 1$, $m \geq 1$, $m \leq n$, $r \leq n$ として、 $m \neq n (m < n)$ ならば

$$\begin{aligned} H_r(S^n \times S^n \times S^m) &\cong \mathbb{Z} \quad (r = 0, m \text{ のとき}) \\ H_r(S^n \times S^n \times S^m) &\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \quad (r = n \text{ のとき}) \\ H_r(S^n \times S^n \times S^m) &= 0 \quad (r \neq 0, m, n \text{ のとき}) \end{aligned}$$

また、 $m = n$ のとき

$$\begin{aligned} H_r(S^n \times S^n \times S^n) &\cong \mathbb{Z} \quad (r = 0 \text{ のとき}) \\ H_r(S^n \times S^n \times S^n) &\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \quad (r = n \text{ のとき}) \\ H_r(S^n \times S^n \times S^n) &= 0 \quad (r \neq 0, n \text{ のとき}) \end{aligned}$$

証明. これも帰納法で証明する。初めに $H_r(S^n \times S^n \times S^1)$ を計算する。 $S^1 = D_+^1 \cup D_-^1$ だから、 $S^n \times S^n \times S^1 = (S^n \times S^n \times D_+^1) \cup (S^n \times S^n \times D_-^1)$ である。これらはそれぞれ $S^n \times S^n \times I$ と同相であって三角形分割可能である。 $|(S^n \times S^n \times D_+^1) \cap (S^n \times S^n \times D_-^1)| = S^n \times S^n \times S^0 = (S^n \times S^n \times \{-1\}) \cup (S^n \times S^n \times \{1\})$ となるが、 $S^n \times S^n \times \{-1\}$, $S^n \times S^n \times \{1\}$ はそれぞれ連結な空間の積空間としてそれ自身連結であり、またこの2つの空間の間に共通部分はないのですべての r について

$$H_r(S^n \times S^n \times S^0) = H_r(S^n \times S^n \times \{-1\}) \oplus H_r(S^n \times S^n \times \{1\})$$

である。ここで次のマイヤー・ビートリス完全系列を考える。

$$\begin{aligned} \dots &\xrightarrow{\alpha_{r+1}} H_r(S^n \times S^n \times \{-1\}) \oplus H_r(S^n \times S^n \times \{1\}) \longrightarrow \\ &\xrightarrow{k_*} H_r(S^n \times S^n \times D_+^1) \oplus H_r(S^n \times S^n \times D_-^1) \xrightarrow{w_*} H_r(S^n \times S^n \times S^1) \longrightarrow \\ &\xrightarrow{\alpha_r} H_{r-1}(S^n \times S^n \times \{-1\}) \oplus H_{r-1}(S^n \times S^n \times \{1\}) \xrightarrow{k_*} \dots \end{aligned}$$

$S^n \times S^n \times \{-1\}$, $S^n \times S^n \times \{1\}$ は $S^n \times S^n$ と同相であり、 $S^n \times S^n \times D_+^1$, $S^n \times S^n \times D_-^1$ は $S^n \times S^n$ にホモトピックであるから $H_n(S^n \times S^n \times \{-1\}) \cong H_n(S^n \times S^n \times \{1\}) \cong H_n(S^n \times S^n \times D_+^1) \cong H_n(S^n \times S^n \times D_-^1) \cong H_n(S^n \times S^n) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ である。

$n \geq 2$ とする。 $r = 1$ については $H_1(S^n \times S^n) = 0$, $H_0(S^n \times S^n) \cong \mathbb{Z}$ より完全系列

$$\begin{aligned} 0 &\xrightarrow{w_1} H_1(S^n \times S^n \times S^1) \xrightarrow{\alpha_1} H_0(S^n \times S^n \times \{-1\}) \oplus H_0(S^n \times S^n \times \{1\}) (\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \longrightarrow \\ &\xrightarrow{k_0} H_0(S^n \times S^n \times D_+^1) \oplus H_0(S^n \times S^n \times D_-^1) (\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

が得られる。 α_1 は単射となるので $\ker \alpha_1 = 0$ であるから準同型定理により

$$H_1(S^n \times S^n \times S^1) / \ker \alpha_1 = H_1(S^n \times S^n \times S^1) \cong \text{image } \alpha_1 = \ker k_0$$

を得、補題 3.44 と同様にして $H_1(S^n \times S^n \times S^1) \cong \mathbb{Z}$ が示される。

$r = n$ については $H_{n-1}(S^n \times S^n) = 0$, $H_n(S^n \times S^n) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ より完全系列

$$\begin{aligned} &H_n(S^n \times S^n \times \{-1\}) \oplus H_n(S^n \times S^n \times \{1\}) (\cong \mathbb{Z}^4) \longrightarrow \\ &\xrightarrow{k_n} H_n(S^n \times S^n \times D_+^1) \oplus H_n(S^n \times S^n \times D_-^1) (\cong \mathbb{Z}^4) \xrightarrow{w_n} H_n(S^n \times S^n \times S^1) \xrightarrow{\alpha_n} 0 \end{aligned}$$

が得られる。このとき w_n が全射となるので $\text{image } w_n = H_n(S^n \times S^n \times S^1)$ より準同型定理を用いて

$$H_n(S^n \times S^n \times S^1) \cong \mathbb{Z}^4 / \ker w_n \cong \mathbb{Z}^4 / \text{image } k_n$$

を得る。ここで $\text{image } k_n \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ を示そう。

$h \in H_n(S^n \times S^n)$ とすると $h \times \{-1\} \in H_n(S^n \times S^n \times \{-1\})$ と $h \times \{1\} \in H_n(S^n \times S^n \times \{1\})$ とは異なるホモロジー類に属する要素であるが、 D_+^1 においては $\{-1\}$ と $\{1\}$ とを結ぶ1次元単体の列が存在するので、これらは $H_n(S^n \times S^n \times D_+^1)$ において同一のホモロジー類に属する。 $H_n(S^n \times S^n \times D_-^1)$ についても同様のことが成り立つ。したがって $\text{image } k_n \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ である。

よって $H_n(S^n \times S^n \times S^1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ が得られる。

$r = 0$ の場合には定理 3.44 と同様にして

$$H_0(S^n \times S^n \times S^1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / \ker w_0 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / \text{image } k_0 \cong \mathbb{Z}$$

を得る。

$r \neq 0, 1, n$ の場合は $H_r(S^n \times S^n) = 0$ および $H_{r-1}(S^n \times S^n) = 0$ なので完全系列

$$0 \xrightarrow{w_r} H_r(S^n \times S^n \times S^1) \xrightarrow{\alpha_r} 0$$

より w_r も α_r も同型となって $H_r(S^n \times S^n \times S^1) = 0$ を得る。

次に $n = 1$ の場合を考える。 $r = 1$ のときは次の完全系列が得られる。

$$\begin{aligned} & H_1(S^1 \times S^1 \times \{-1\}) \oplus H_1(S^1 \times S^1 \times \{1\}) (\cong \mathbb{Z}^4) \longrightarrow \\ & \xrightarrow{k_1} H_1(S^1 \times S^1 \times D_+^1) \oplus H_1(S^1 \times S^1 \times D_-^1) (\cong \mathbb{Z}^4) \xrightarrow{w_1} H_1(S^1 \times S^1 \times S^1) \longrightarrow \\ & \xrightarrow{\alpha_1} H_0(S^1 \times S^1 \times \{-1\}) \oplus H_0(S^1 \times S^1 \times \{1\}) (\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \longrightarrow \\ & \xrightarrow{k_0} H_0(S^1 \times S^1 \times D_+^1) \oplus H_1(S^1 \times S^1 \times D_-^1) (\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

準同型定理によって $H_1(S^1 \times S^1 \times S^1)/\ker \alpha_1 = H_1(S^1 \times S^1 \times S^1)/\text{image } w_1 \cong \text{image } \alpha_1 = \ker k_0 \cong \mathbb{Z}$ となる ($\ker k_0 \cong \mathbb{Z}$ は定理 3.44 と同様)。また、やはり準同型定理によって $\mathbb{Z}^4/\ker w_1 = \mathbb{Z}^4/\text{image } k_1 \cong \text{image } w_1$ が得られ、さらに $\text{image } k_1 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ($\text{image } k_n \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ と同様にして求められる) より $\text{image } w_1 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ となる。よって $H_1(S^1 \times S^1 \times S^1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ を得る^{*33}。

$r = 0$ の場合は上で示した $n \geq 2$ の場合と同様の議論によって $H_0(S^1 \times S^1 \times S^1) \cong \mathbb{Z}$ が得られる。

$S^n \times S^n \times S^{m-1}$ について上記の事実が成り立つと仮定して $S^n \times S^n \times S^m$ の場合を考える。 $S^m = D_+^m \cup D_-^m$ だから $S^n \times S^n \times S^m = (S^n \times S^n \times D_+^m) \cup (S^n \times S^n \times D_-^m)$ であり、これらは三角形分割可能である。また、 $|(S^n \times S^n \times D_+^m) \cap (S^n \times S^n \times D_-^m)| = S^n \times S^n \times S^{m-1}$ である。ここで次のマイヤー・ビートリス完全系列を考える。

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{\alpha_{r+1}} H_r(S^n \times S^n \times S^{m-1}) \xrightarrow{k_*} H_r(S^n \times S^n \times D_+^m) \oplus H_r(S^n \times S^n \times D_-^m) \longrightarrow \\ \xrightarrow{w_*} H_r(S^n \times S^n \times S^m) \xrightarrow{\alpha_r} H_{r-1}(S^n \times S^n \times S^{m-1}) \xrightarrow{k_*} \dots \end{aligned}$$

$S^n \times S^n \times D_+^m$, $S^n \times S^n \times D_-^m$ はそれぞれ $S^n \times S^n$ とホモトピックであるから、それらのホモロジー群は $S^n \times S^n$ のホモロジー群と同型である。

$r \neq 0, n, m$ のときは帰納法の仮定より $H_{r-1}(S^n \times S^n \times S^{m-1}) = 0$ であり、また $H_r(S^n \times S^n) = 0$ であるから完全系列

$$0 \xrightarrow{w_r} H_r(S^n \times S^n \times S^m) \xrightarrow{\alpha_r} 0$$

が得られ、 w_r も α_r も同型となって $H_r(S^n \times S^n \times S^m) = 0$ を得る。

$m \neq n$ と仮定して $r = n$ の場合を考えると、 $H_n(S^n \times S^n \times S^{m-1}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $H_{n-1}(S^n \times S^n \times S^{m-1}) = 0$ より完全系列

$$\begin{aligned} H_n(S^n \times S^n \times S^{m-1}) \xrightarrow{k_n} H_n(S^n \times S^n \times D_+^m) \oplus H_n(S^n \times S^n \times D_-^m) (\cong \mathbb{Z}^4) \longrightarrow \\ \xrightarrow{w_n} H_n(S^n \times S^n \times S^m) \xrightarrow{\alpha_n} 0 \end{aligned}$$

が得られる。このとき w_n が全射となるので $\text{image } w_n = H_n(S^n \times S^n \times S^m)$ より準同型定理を用いて

$$H_n(S^n \times S^n \times S^m) \cong \mathbb{Z}^4/\ker w_n \cong \mathbb{Z}^4/\text{image } k_n$$

^{*33} $H_1(S^1 \times S^1 \times S^1)/\text{image } w_1 \cong \mathbb{Z}$ であり、 $\text{image } w_1 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ であるから $H_1(S^1 \times S^1 \times S^1)$ の要素の内 2 つの整数の組み合わせの部分を同一視して \mathbb{Z} が得られるので $H_1(S^1 \times S^1 \times S^1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ となる。

を得る。上記の $m = 1$ の場合と同様にして $\text{image } k_n \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ が示されるので $H_n(S^n \times S^n \times S^m) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ が得られる。 $r = 0$ についても上記の $m = 1$ の場合と同様にして $H_0(S^n \times S^n \times S^m) \cong \mathbb{Z}$ を得る。

$r = m$ のときは $H_m(S^n \times S^n) = 0$, $H_{m-1}(S^n \times S^n) = 0$ より完全系列

$$0 \xrightarrow{w_m} H_m(S^n \times S^n \times S^m) (\cong \mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha_m} H_{m-1}(S^n \times S^n \times S^{m-1}) (\cong \mathbb{Z}) \xrightarrow{k_{m-1}} 0$$

が得られる。 α_m は同型となるので

$$H_m(S^n \times S^n \times S^m) \cong \mathbb{Z}$$

を得る。

次に $m = n$ の場合を考える。 $r = 0$, $r \neq 0, n$ については上記の $m = 1$ および $m \neq n$ の場合と同様にして $H_0(S^n \times S^n \times S^n) \cong \mathbb{Z}$, $H_r(S^n \times S^n \times S^n) = 0 (r \neq 0, n)$ が示される。最後に $r = n$ とする。このとき次の完全系列が得られる。

$$\begin{aligned} H_n(S^n \times S^n \times S^{n-1}) (\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) &\xrightarrow{k_n} H_n(S^n \times S^n \times D_+^n) \oplus H_n(S^n \times S^n \times D_-^n) (\cong \mathbb{Z}^4) \longrightarrow \\ &\xrightarrow{w_n} H_n(S^n \times S^n \times S^n) \xrightarrow{\alpha_n} H_{n-1}(S^n \times S^n \times S^{n-1}) (\cong \mathbb{Z}) \xrightarrow{k_{n-1}} 0 \end{aligned}$$

α_n が全射であるから $\text{image } \alpha_n \cong \mathbb{Z}$ である。したがって準同型定理により $H_n(S^n \times S^n \times S^n) / \ker \alpha_n = H_n(S^n \times S^n \times S^n) / \text{image } w_n \cong \mathbb{Z}$ である。さらに準同型定理によって $\mathbb{Z}^4 / \ker w_n \cong \text{image } w_n$ であるが、 $\ker w_n = \text{image } k_n \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ より $\text{image } w_n \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ となり $H_n(S^n \times S^n \times S^n) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ が得られる。☺

以上2つの補題をもとにして帰納的に次の結果を得る。

定理 3.46.

$$H_n((S^n)^q) \cong \mathbb{Z}^q$$

3.16 ホモロジー群と写像度

写像度 S^n を n 次元球面とすると $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ である。連続写像 $f: S^n \rightarrow S^n$ によって導かれる準同型

$$f_*: H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$$

について $H_n(S^n)$ の生成元を x とすると f_* は準同型であるから任意の $y = nx (\in H_n(S^n) : n \in \mathbb{Z})$ に対して $f_*(y) = nf_*(x)$ であり、 $f_*(x) = \gamma(f)x$ とすれば $f_*(y) = n\gamma(f)x = \gamma(f)y$ となる。 $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ なので $\gamma(f)$ は整数である。この整数 $\gamma(f)$ を f の写像度と呼ぶ。写像度について次の事実が成り立つ。

- (1). 2つの連続写像 f, g がホモトピックであればそれらによって導かれる準同型 f_*, g_* は等しい ($f_* = g_*$) ので写像度は等しい、すなわち $\gamma(f) = \gamma(g)$ 。
- (2). 恒等写像 f によって導かれる準同型はホモロジー群の恒等写像である ($f_*(x) = x$) から恒等写像の写像度は1に等しい。
- (3). 定値写像 (すべての点を同一の点に移す写像) によって導かれる準同型は0なので定値写像の写像度は0に等しい。また、全射ではない連続写像の像は1点とホモトピー同値であるから^{*34}、そのような写像の写像度も0である。
- (4). f, g を連続写像、 $h = g \circ f$ をそれらの合成写像とすると $h_* = g_* \circ f_*$ であるから $\gamma(h) = \gamma(f)\gamma(g)$ である。

^{*34} 像は S^n から少なくとも1点を取り除いたものであり、 S^n 上で1点に連続的に収縮させられる。

4 社会的選択理論への応用

4.1 連続性, 匿名性, 全員一致性を満たす社会的選択ルール

2人以上 k 人の個人からなる社会において選択肢の集合を $X = \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) として, X に関する個人の選好から社会的な選好を導く社会的選択ルール (社会的厚生関数 (social welfare function)) を考える*35。ある個人の選好は X 上で定義された無差別曲面によって表され, X のある点 x における無差別曲面に垂直なベクトルを $p(x)$ とする。 p の符号はその個人の選好が正となる (効用が増大する) 方向を正として定められる。序数的な効用を考えるので選好の方向性だけが問題でありその強さは関係ないから $p(x)$ は大きさが1のベクトルであると仮定することができる。各点 x において可能な $p(x)$ の集合を P で表す。あらゆる方向の選好が可能であれば P は半径1の $n-1$ 次元球面 S^{n-1} をなす。社会的厚生関数は X の各点 x において k 人の人々の選好の組み合わせから社会の選好を導き出すものであり, $F: (S^{n-1})^k \rightarrow S^{n-1}$ と表される。 $P^k = (S^{n-1})^k$ の要素を \mathbf{p} で表す。

まず以下の定理の証明に必要ないくつかの結果を示しておこう。

補題 4.1. S^{n-1} から S^{n-1} への2つの関数 f, g について, すべての $x \in S^{n-1}$ について $f(x) \neq -g(x)$ ならば f と g はホモトピックである。

証明. 関数

$$H(x, t): S^{n-1} \times I \rightarrow S^{n-1}: (x, t) \rightarrow \frac{(1-t)f(x) + tg(x)}{|(1-t)f(x) + tg(x)|}$$

を考えると, これは f と g の間のホモトピーである (I は閉区間 $[0, 1]$ を表す)。

$\frac{(1-t)f(x)+tg(x)}{|(1-t)f(x)+tg(x)|}$ が表す点と原点との距離 (あるいはベクトルの大きさ) は $|f(x) + tg(x)| \neq 0$ である限り常に1に等しい。また $f(x) \neq -g(x)$ であれば $f(x)$ と $g(x)$ が逆方向のベクトルになることはないので $|f(x) + tg(x)| = 0$ とはならない。一方ある x について $f(x) = -g(x)$ ならば $t = 1/2$ のとき $|f(x) + tg(x)| = 0$ となる。

☺

個人の選好の組み合わせ $\mathbf{p} \in (S^{n-1})^k$ を固定して以下のような包含写像を考える。

(1). $i_l: S^{n-1} \rightarrow (S^{n-1})^k: p \rightarrow (\mathbf{p}_{-l}, p)$

\mathbf{p}_{-l} は \mathbf{p} における個人 l ($1 \leq l \leq k$) 以外の人々の選好の組み合わせを表す。各 l についてこのような包含写像 i_l を定義する。 p は S^{n-1} 全体で変わり得るが, $(S^{n-1})^k$ において l 番目以外の選好は変化せず, l 番目の選好は p と同一である。この包含写像によって導かれる $n-1$ 次元ホモロジー群の準同型を $i_{l*}: H_{n-1}(S^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(S^{n-1})^k$ とすると $i_{l*}(h) = (0, \dots, h, \dots, 0)$ (l 番目のみ h で他は 0 , h はあるホモロジー類の代表元) となる。

(2). $\Delta: S^{n-1} \rightarrow (S^{n-1})^k: p \rightarrow (p, \dots, p)$ (すべての成分が p に等しい)

p は S^{n-1} 全体で変わり, それに対応して $(S^{n-1})^k$ においてすべての成分が p と同じように変化するから, この包含写像によって導かれるホモロジー群の準同型を Δ_* とすると $\Delta_*(h) = (h, \dots, h)$ (すべ

*35 以下の内容は Chichilnisky (1982b), Mehta (1997), Lauwers (2000) による。社会的厚生関数という言葉には社会的選好が推移性 (transitivity) を満たすという仮定が含まれている。

ての成分が h) である。これらは準同型であるから次の式が成り立つ。

$$\Delta_* = i_{1*} + i_{2*} + \cdots + i_{k*} \quad (4.1)$$

次に社会的厚生関数 F と上記の包含写像との合成関数を考える。

- (1). $F \circ i_l$ (各 l について) : $S^{n-1} \rightarrow S^{n-1} : p \rightarrow F(\bar{\mathbf{p}}_{-l}, p)$
- (2). $F \circ \Delta : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1} : p \rightarrow F(p, \dots, p)$

これらは球面から球面への連続な関数であるから写像度が定義できる。 $\bar{\mathbf{p}}$ とは異なる選好の組み合わせ $\bar{\mathbf{p}}'$ に対応した $p \rightarrow F(\bar{\mathbf{p}}'_{-l}, p)$ は $p \rightarrow F(\bar{\mathbf{p}}_{-l}, p)$ とホモトピックであるから $F \circ i_l$ の写像度は個人 l 以外の人々の選好には依存しない。

$\bar{\mathbf{p}}_{-l}$ と $\bar{\mathbf{p}}'_{-l}$ の各個人 (個人 l 以外) の成分を p_j, p'_j とし、各個人について $-p_j, -p'_j$ とは異なる選好 $\hat{p}_j \in S^{n-1}$ をとる。

$$\begin{aligned} 0 \leq t < \frac{1}{2} \text{ のとき } p''_j &= \frac{(1-2t)p_j + 2t\hat{p}_j}{|(1-2t)p_j + 2t\hat{p}_j|} \\ \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \text{ のとき } p''_j &= \frac{(2t-1)p'_j + (2-2t)\hat{p}_j}{|(2t-1)p'_j + (2-2t)\hat{p}_j|} \end{aligned}$$

とおけば $p''_j \in S^{n-1}$ である。この p''_j の組を $\bar{\mathbf{p}}''_{-l}$ とし、個人 l の選好を p として

$$H(p, t) = F(\bar{\mathbf{p}}''_{-l}, p)$$

を考えるとこれは $F(\bar{\mathbf{p}}_{-l}, p)$ と $F(\bar{\mathbf{p}}'_{-l}, p)$ との間のホモトピーである。

さらに写像度について次の事実を示すことができる。

補題 4.2. $F \circ i_l$ (各 l について) と $F \circ \Delta$ の写像度に関して次の式が成り立つ。

$$\deg(F \circ \Delta) = \deg(F \circ i_1) + \deg(F \circ i_2) + \cdots + \deg(F \circ i_k) \quad (4.2)$$

証明. 合成関数によって導かれるホモロジー群の関係によって $(F \circ \Delta)_* = F_* \circ \Delta_*$ および $(F \circ i_l)_* = F_* \circ i_{l*}$ が成り立つ。(4.1) より

$$\begin{aligned} (F \circ \Delta)_* &= F_* \circ \Delta_* = F_* \circ (i_{1*} + i_{2*} + \cdots + i_{k*}) = F_* \circ i_{1*} + F_* \circ i_{2*} + \cdots + F_* \circ i_{k*} \\ &= (F \circ i_1)_* + (F \circ i_2)_* + \cdots + (F \circ i_k)_* \end{aligned}$$

となる。したがって

$$\deg(F \circ \Delta) = \deg(F \circ i_1) + \deg(F \circ i_2) + \cdots + \deg(F \circ i_k)$$

が得られる。☺

ここでアローの一般可能性定理 (以下, アローの定理) で要求されているものに類似した社会的厚生関数が満たすべき条件を考える。

- (1). 連続性 (continuity)

これは F が \mathbf{p} について連続であることを要求するものであるが、その意味するところは人々の選好がごくわずかに変化したときに社会的選好が大きくは変化しないということである。

(2). 匿名性 (anonymity)

すべての人々が社会的選好に対して同一の影響力を持つことを要求するものであり、 F に関しては k 人の選好の組み合わせが同じであれば順序が変わっても、すなわちある個人の選好と別の個人の選好が入れ替わっても社会的選好が変わらないことを求めるものである。アローの定理における独裁者の非存在よりも強い条件になっている。

(3). 全員一致性 (unanimity)

すべての人々の選好が一致した場合にはそれが社会的選好になることを求める条件であり、次の小節で仮定するパレート原理よりも弱いものである。

以上の準備のもとに上記の3つの条件をすべて満たす社会的厚生関数は存在しないことを示す。

定理 4.3. 連続性, 匿名性, 全員一致性のすべてを満たす社会的厚生関数は存在しない。

証明. 全員一致性により $F \circ \Delta(p) = p$ がすべての $p \in S^{n-1}$ について成り立つ。したがって $F \circ \Delta$ は恒等写像となるのでその写像度は1に等しい、すなわち $\deg(F \circ \Delta) = 1$ である。一方、匿名性によってすべての l について $F \circ i_l$ の写像度は等しくなければならない。したがって (4.2) より $\deg(F \circ \Delta) = k \deg(F \circ i_l)$ を得るが、これは写像度が整数であることに反する。よって定理が証明された。 ☺

4.2 連続性, パレート原理を満たす社会的選択ルール

次にパレート原理を満たす社会的厚生関数についての定理を示そう。全員一致性に代えて次の2つの条件をおく。

パレート原理 (Pareto principle) X に含まれるある任意の2つの選択肢 x, y について、全員が y より x を好むならば社会的にも y より x が好まれる。

これはある2つの選択肢の組についてだけ全員の選好が一致することを前提とするものであり、あらゆる選択肢の組について全員の選好が一致することを前提とする全員一致性よりも前提が弱いので、条件としてはより強くなっている。パレート原理は全員一致性を意味する。

弱い正の反応性 (Weak positive association condition, WPAC) ある選好の組み合わせ \mathbf{p} において、ある個人 l について $F(\mathbf{p}) = -p_l$ ならば、 $F(\bar{\mathbf{p}}_{-l}, p_l) \neq p_l$ である。ただし、 $\bar{\mathbf{p}} = (-p_l, \dots, -p_l)$ (すべてが $-p_l$)。

この条件は、ある選好の組み合わせにおいて社会的厚生関数が個人 l の選好とは逆の選好を選んでいるとき、個人 l 以外の人々の選好がその逆の選好になったときに社会的厚生関数が個人 l の選好を選ばないということを意味する。

まずパレート原理の持つ意味を考えてみる。

補題 4.4. 社会的厚生関数がパレート原理を満たすものとする。個人 l が選好 $-p$ を持ち、他のすべての人々が選好 p を持っているとき社会的厚生関数は p か $-p$ のいずれかを選ぶ。

証明. $x \in X$ において個人 l 以外のすべての人々が選好 p を持ち、個人 l が選好 $p' (\neq -p)$ を持っているとき、パレート原理を満たす社会的厚生関数が選ぶ選好を p^* とする。各選好が適当な効用関数で表現されるものとなれば p や p' などはその勾配を表している。パレート原理は p と p' が表す効用がともに増加する方向に社会的選好 p^* が表す効用も増加することを要求する。言い換えれば S^{n-1} のベクトルを v として内積 $p \cdot v$, $p' \cdot v$ がともに正となるすべての v について内積 $p^* \cdot v$ も正となることが求められる。

ここで p' が $-p$ に近づいて行くとすると $p \cdot v > 0$, $p' \cdot v > 0$ を満たす v は p と p' , $-p$ を結ぶ円 (大円) の片方の半円の中点に近づき, p^* はその片方の半円に含まれる点に近づいて行く。一方 p' を上記のものとは逆方向にとって $-p$ に近づけて行くとすると, その極限において p^* は p と p' , $-p$ を結ぶ大円のもう一方の半円に含まれる点に近づいて行く。社会的厚生関数の連続性によってこれら両者は一致しなければならないので p^* は p または $-p$ でなければならない。

$p' = -p$ のときには p と $-p$ の両方と正の内積を持つベクトルはないのでパレート原理によって p^* は制約を受けない。すなわち S^{n-1} 上のすべてのベクトルがパレート原理を満たす。しかし, 極限において p' が $-p$ に近づいて行くときには p^* は p と $-p$ を結ぶ2つの半円のそれぞれに含まれる点に近づいていくので, 社会的厚生関数の連続性によって p または $-p$ とならなければならない。

☺

さらにパレート原理によって次のことがわかる。 $\bar{p} = (p, p, \dots, p)$ とする。

性質 1 すべての $p' (\neq -p)$ について $F(\bar{p}_{-l}, p') \neq -p'$

$F(\bar{p}_{-l}, p')$ は p , p' と正の内積を持つベクトルとの間で正の内積を持たなければならないが $-p'$ はその条件を満たさない。

性質 2 すべての $p' (\neq -p)$ について $F(\bar{p}_{-l}, p') \neq -p$

同様に $F(\bar{p}_{-l}, p')$ は p , p' と正の内積を持つベクトルとの間で正の内積を持たなければならないが $-p$ はその条件を満たさない。

これらの結果にもとづいて次の補題を示す。

補題 4.5. 社会的厚生関数がパレート原理を満たすものとする。そのとき

- (1). 各個人に対応した $F \circ i_l$ の写像度は1か0である。
- (2). 1に等しい写像度を持つ $F \circ i_l$ が1つあり, 1つだけである。

証明. (1). $F \circ i_l$ の写像度は個人 l 以外の人々の選好に依存しないので $\bar{p} = (p, p, \dots, p)$ (すべての人々の選好が p に等しい) をとって $F \circ i_l : p' \rightarrow F(\bar{p}_{-l}, p')$ を考える。補題 4.4 より $F(\bar{p}_{-l}, -p)$ は p または $-p$ に等しい。 $F \circ i_l(-p) = -p$ のときは上記の性質 1 によって, すべての p' について $F \circ i_l(p') \neq -p'$ が成り立つので補題 4.1 により $F \circ i_l$ は恒等写像にホモトピックであるからその写像度は1に等しい。

一方 $F \circ i_l(-p) = p$ のときは上記の性質 2 によって, すべての p' について $F \circ i_l(p') \neq -p$ が成り立つので補題 4.1 により $F \circ i_l$ は定値写像 ($p' \rightarrow p$) にホモトピックであるから写像度は0に等しい。

- (2). パレート原理は全員一致性を意味するので $F \circ \Delta$ の写像度は1に等しい。したがって (4.2) により唯一人の個人に関する $F \circ i_l$ の写像度だけが1に等しく, その他の個人に関する $F \circ i_l$ の写像度は0である。

☺

以上の議論から次の結論が導かれる。

定理 4.6. 連続性, パレート原理および弱い正の反応性を満たすいかなる社会的厚生関数も独裁的な社会的厚生関数にホモトピックである。

証明. 選好の組み合わせを \mathbf{p} で表す。個人 d (その選好は p_d) を独裁者とする独裁的な社会的厚生関数 $\Pi_d(\mathbf{p})$ は常に $\Pi_d(\mathbf{p}) = p_d$ を満たす。したがって $\Pi_d(\mathbf{p}) \circ i_d$ は恒等写像となりその写像度は 1 に等しい。
各個人 l について次の条件を考える。

すべての $\mathbf{p} \in (S^{n-1})^k$ について $F(\mathbf{p}) \neq -p_l (= -\Pi_l(\mathbf{p}))$, ただし p_l は \mathbf{p} における個人 l の選好を表す。

もしこの条件が個人 l について成り立つとすると補題 4.1 によって F と Π_l (独裁的な社会的厚生関数) はホモトピックである。したがって $F \circ i_l$ の写像度は 1 である。

一方, ある選好の組み合わせにおいて $F(\mathbf{p}) = -p_l$ であるとする, 性質 2 と弱い正の反応性によって $\bar{\mathbf{p}} = (-p_l, -p_l, \dots, -p_l)$ に対して

$$F \circ i_l : p' \longrightarrow F(\bar{\mathbf{p}}_{-l}, p')$$

の値が p_l となることはない。すなわち $F \circ i_l$ は全射ではないのでその写像度は 0 である。

上記の条件が 2 人以上の個人に成り立つことはないので社会的厚生関数が独裁的な社会的厚生関数にホモトピックであることが示された。 ☺

これに関連した別の定理を示す*36。

定理 4.7. 連続性, パレート原理および次に定義する「拒否権者の非存在」の条件を満たす社会的厚生関数は存在しない。

拒否権者の非存在 (no-veto condition) 社会的厚生関数 F が次の条件を満たす。

$$F(\bar{\mathbf{p}}_{-l}, -p) \neq -p, \text{ ただし } \bar{\mathbf{p}} = (p, \dots, p) \text{ (すべてが } p)$$

この条件は, ある 1 人の人が他のすべての人々と逆の選好を持つときに, 社会的選好がその逆の選好になることはないということを求める。

証明. 上記の性質 2 と拒否権者の非存在の条件により, 各個人 l について包含写像 $i_l : p' \longrightarrow (\bar{\mathbf{p}}_{-l}, p')$ と F との合成関数 $F \circ i_l(p')$ の値域は $-p$ を含まないので全射とはならないから $(F \circ i_l)_*$ の写像度は 0 である。すべての個人についてこれが成り立つが, それはパレート原理と矛盾する*37。 ☺

これに関連して次の結果を得る*38。

定理 4.8. 連続性, パレート原理および次に定義する「決定的多数決性」の条件を満たす社会的厚生関数は存在しない。

決定的多数決性 (decisive majority) 全体の人々の集合が 2 つに分けられ, 一方の人々は p という選好を共通に持ち, 残りの人々が逆の選好 $-p$ を持っているとき, 社会的厚生関数は人数の多い方の選好と一致する。

この条件は全員一致性をより強くしたものになっている。

証明. 決定的多数決性は上記の拒否権者の非存在条件を意味する (決定的多数決性の方が条件としては強い) ので前の定理からこの定理が得られる。 ☺

*36 この定理は Lauwers (2000) による。

37 パレート原理によって $(F \circ \Delta)_$ の写像度は 1 である。

*38 この定理は Chichilnisky (1982a), Mehta (1997) による。

4.3 連続性に類似した社会的選択ルールの条件（近接性の保存）について

4.3.1 近接性の保存 1

連続性に類似した社会的選択ルールの条件に「近接性の保存」(proximity preservation)と呼ばれるものがある。これは連続性と同様に個人の選好の少しの変化によって社会的選好が大きく変化しないというものであるが、その分析にはトポロジーは用いない*39。選択肢の集合を A とし k 人の個人からなる社会を考える。人々のある選好を p 、その集合を \mathcal{P} 、選好の組み合わせを \mathbf{p} 、その集合を \mathcal{P}^k とすると、社会的厚生関数は $F(\mathbf{p}) : \mathcal{P}^k \rightarrow \mathcal{P}$ と表される。

まず個人および社会的選好の距離と選好の組み合わせの距離を次のように定義する。

個人および社会的選好の距離 2つの選好 p, p' の距離を $d(p, p')$ で表し次のように定義する。

$$d(p, p') = |p - p'|$$

$|p - p'|$ は p と p' において異なる選好の数を表す。例えば p と p' において2つの選択肢 x, y についてだけ選好が異なる場合は $d(p, p') = 1$ である。これは次の距離の条件を満たす。

- (1) $d(p, p) = 0$, (2) $p \neq p'$ ならば $d(p, p') > 0$, (3) $d(p, p') = d(p', p)$,
- (4) 異なる3つの選好 p, p', p'' について $d(p, p'') \leq d(p, p') + d(p', p'')$

社会的選好についても同様に

$$d(F(\mathbf{p}), F(\mathbf{p}')) = |F(\mathbf{p}) - F(\mathbf{p}')|$$

で距離が定義される (\mathbf{p}, \mathbf{p}' は2つの選好の組み合わせ)。

選好の組み合わせの距離 2つの選好の組み合わせ \mathbf{p}, \mathbf{p}' の距離を

$$D(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \sum_{i=1}^k d(p_i, p'_i)$$

と定義する。 p_i, p'_i はそれぞれ \mathbf{p}, \mathbf{p}' における個人 i の選好を表す (以下同様)。

これらの距離について近接性の保存条件を定義する。

近接性の保存 任意の3つの選好の組み合わせ $\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{p}''$ について、 $D(\mathbf{p}, \mathbf{p}'') > D(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ であるときに $d(F(\mathbf{p}), F(\mathbf{p}')) > d(F(\mathbf{p}), F(\mathbf{p}''))$ とはならない。

以上の準備をもとに次の結果が示される。

補題 4.9. 社会的厚生関数は全員一致性を満たすものとし、すべての人々が同じ選好 $p, q (p \neq q)$ を持つ選好の組み合わせをそれぞれ \mathbf{p}, \mathbf{q} で表す。任意の選好の組み合わせ \mathbf{r} について

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{q}) \leq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil d(p, q) \text{ ならば } F(\mathbf{r}) = F(\mathbf{q})$$

が成り立つならば次の条件を満たす選好の組み合わせ \mathbf{s} が存在する。 $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$ は $\frac{k}{2}$ を下回らない最小の整数であり、 k が偶数ならば $\frac{k}{2}$ 、 k が奇数のときには $\frac{k+1}{2}$ に等しい。

$$\text{すべての個人について } s_i = p \text{ または } s_i = q, D(\mathbf{s}, \mathbf{p}) \leq \left\lceil \frac{k-1}{2} \right\rceil d(p, q) \text{ かつ } F(\mathbf{s}) \neq F(\mathbf{p})$$

*39 以下の内容は Baigent (1987) による。

証明.

$$F(\mathbf{t}) \neq F(\mathbf{q}) \text{ かつ, すべての個人 } i \text{ について } t_i = p \text{ または } t_i = q$$

という条件を満たす選好の組み合わせ \mathbf{t} の内で $D(\mathbf{t}, \mathbf{q})$ が最も小さいものをあらためて \mathbf{t} で表す。 $F(\mathbf{t}) \neq F(\mathbf{q})$ であるから仮定より $D(\mathbf{t}, \mathbf{q}) > \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil d(p, q)$ である。これは \mathbf{t} において p の選好を持つ人々の数が, k が偶数の場合には $\frac{k}{2}$ より多く, k が奇数の場合には $\frac{k+1}{2}$ より多いことを意味する。逆に言えば q の選好を持つ人は k が偶数の場合には $\frac{k}{2}$ より少なく, k が奇数の場合には $\frac{k-1}{2}$ より少ない。一般的には $\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor$ より少ないと表される。したがって $D(\mathbf{t}, \mathbf{p}) < \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor d(p, q)$ となる。ここで選好の組み合わせ \mathbf{s} を次のようにして作る。

- (1). $t_j = p$ であるようなある 1 人の個人 j について $s_j = q$
- (2). それ以外の人々 (i で表す) については $s_i = t_i$

すると $D(\mathbf{s}, \mathbf{q}) = D(\mathbf{t}, \mathbf{q}) - d(p, q)$, すなわち

$$D(\mathbf{s}, \mathbf{q}) < D(\mathbf{t}, \mathbf{q})$$

であるから $F(\mathbf{s}) = F(\mathbf{q}) = q$ (全員一致性により) である。 \mathbf{t} は $F(\mathbf{t}) \neq F(\mathbf{q})$ であって全員が p または q の選好を持つ選好の組み合わせの中で \mathbf{q} に最も近いものであった。 \mathbf{s} は \mathbf{t} において 1 人の選好だけが p から q に変化したものであり, また $D(\mathbf{t}, \mathbf{p}) < \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor d(p, q)$ であるから

$$D(\mathbf{s}, \mathbf{p}) = D(\mathbf{t}, \mathbf{p}) + d(p, q) \leq \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor d(p, q)$$

が得られる。

☺

その上で次の定理を証明する。

定理 4.10. 匿名性, 全員一致性, 近接性の保存条件を満たす社会的厚生関数は存在しない。

証明. すべての人々が同じ選好 $p, q (p \neq q)$ を持つ選好の組み合わせを \mathbf{p}, \mathbf{q} とし, 任意の選好の組み合わせ \mathbf{r} について

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{q}) \leq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil d(p, q) \text{ ならば } F(\mathbf{r}) = F(\mathbf{q})$$

が成り立つと仮定する。そのとき補題 4.9 より次の条件を満たす選好の組み合わせ \mathbf{s} がある。

$$\text{すべての個人 } i \text{ について } s_i = p \text{ または } s_i = q, D(\mathbf{s}, \mathbf{p}) \leq \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor d(p, q) \text{ かつ } F(\mathbf{s}) \neq F(\mathbf{p})$$

別の選好の組み合わせ \mathbf{s}' を次のように作る。

- (1). $s_i = q$ の人々の集合を I_1 とし, それらの人々について $s'_i = p$
- (2). I_1 以外の人々の内 I_1 と同じ人数からなるある集合を I_2 とし, それらの人々について $s'_i = q$
- (3). 残りの人がいれば^{*40}, その集合を I_3 として $s'_i = p$

^{*40} $D(\mathbf{s}, \mathbf{p}) = \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor d(p, q)$ であるとすると, k が偶数のときには (そのとき $\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor = \frac{k}{2}$) 残りの人はいない。 k が奇数の場合には (そのとき $\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor = \frac{k-1}{2}$) 1 人だけいる。

すると

$$\begin{aligned} D(\mathbf{s}, \mathbf{s}') &= \sum_{I_1} d(s_i, s'_i) + \sum_{I_2} d(s_i, s'_i) + \sum_{I_3} d(s_i, s'_i) \\ &= \sum_{I_1} d(s_i, p) + \sum_{I_3} d(s_i, p) + \sum_{I_2} d(s_i, s'_i) \\ &= D(\mathbf{s}, \mathbf{p}) + \sum_{I_2} d(s_i, s'_i) > D(\mathbf{s}, \mathbf{p}) \end{aligned}$$

となる。 $F(\mathbf{s}) \neq F(\mathbf{p})$ であるから $d(F(\mathbf{s}), F(\mathbf{p})) > 0$ であり、 F が匿名性を満たせば $d(F(\mathbf{s}), F(\mathbf{s}')) = 0$ である。したがって $d(F(\mathbf{s}), F(\mathbf{p})) > d(F(\mathbf{s}), F(\mathbf{s}'))$ となるが、これは近接性の保存条件に反する。よって、ある選好の組み合わせ \mathbf{r} において

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{q}) \leq \left[\frac{k}{2} \right] d(p, q) \text{ であって } F(\mathbf{r}) \neq F(\mathbf{q})$$

が成り立たなければならない。そのとき \mathbf{r} をもとに選好の組み合わせ \mathbf{r}' を \mathbf{s} から \mathbf{s}' を作ったのと同じようにして作ることができる。そのとき $D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') > D(\mathbf{r}, \mathbf{q})$ かつ $d(F(\mathbf{r}), F(\mathbf{q})) > d(F(\mathbf{r}), F(\mathbf{r}'))$ となるが、これも近接性の保存条件に反する。☺

4.3.2 近接性の保存 2 (距離の調和性)

次に少し異なる距離の定義にもとづく分析を見てみよう^{*41}。個人の選好、および社会的選好の距離と選好の組み合わせの距離を次のように定義する。

個人の選好、および社会的選好の距離 2つの選好 p, p' の距離を $d(p, p')$ で表し、 $d(p, p')$ は次の条件を満たすものとする。

- (1) $d(p, p) = 0$, (2) $p \neq p'$ ならば $d(p, p') > 0$, (3) $d(p, p') = d(p', p)$,
- (4) 異なる3つの選好 p, p', p'' について $d(p, p'') \leq d(p, p') + d(p', p'')$

選好の組み合わせの距離 2つの選好の組み合わせ \mathbf{p}, \mathbf{p}' の距離を $D(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ で表す。上と同様に次の条件を満たすものとする。

- (1) $D(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = 0$, (2) $\mathbf{p} \neq \mathbf{p}'$ ならば $D(\mathbf{p}, \mathbf{p}') > 0$, (3) $D(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = D(\mathbf{p}', \mathbf{p})$,
- (4) 異なる3つの選好 $\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{p}''$ について $D(\mathbf{p}, \mathbf{p}'') \leq D(\mathbf{p}, \mathbf{p}') + D(\mathbf{p}', \mathbf{p}'')$

さらに、 \mathbf{p}, \mathbf{p}' において選好が同じである人々の集合を $I(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ で表し、選好の組み合わせの距離について以下の条件を仮定する。

距離の調和性 (congruence)

3つの選好の組み合わせ $\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{p}''$ について、それぞれが2つの選好 p, p' だけを含み、 $I(\mathbf{p}, \mathbf{p}'') \subset I(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ かつ $I(\mathbf{p}, \mathbf{p}'') \neq I(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ ならば $D(\mathbf{p}, \mathbf{p}') < D(\mathbf{p}, \mathbf{p}'')$ である。

その上で上記と同じ近接性の保存条件をおく (再掲する)。

近接性の保存 任意の3つの選好の組み合わせ $\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{p}''$ について、 $D(\mathbf{p}, \mathbf{p}'') > D(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ であるときに $d(F(\mathbf{p}), F(\mathbf{p}'')) > d(F(\mathbf{p}), F(\mathbf{p}'))$ とはならない。

^{*41} 以下の内容は Grafe and Grafe (2001) による。

以上の準備のもとに次の定理を示す。

定理 4.11. 匿名性, 全員一致性, 近接性の保存条件を満たす社会的厚生関数は存在しない。

証明. 異なる選好 p と p' について調和性を満たす選好の組み合わせの距離 D をとり, \mathbf{p}, \mathbf{p}' を, それぞれ p, p' だけからなる (全員が同じ選好を持つ) 選好の組み合わせとする。また k 人の個人を K (1人以上), L (1人以上で K と人数が等しい), M (1人または0人, 空集合でもよい) に分ける^{*42}。ここで選好の組み合わせ \mathbf{p}^1 を, K と M の人々については \mathbf{p} と一致し, L の人々については \mathbf{p}' と一致する選好の組み合わせであり, \mathbf{p}^2 を \mathbf{p}^1 において K と L の人々を入れ替えた選好の組み合わせであると定義する。そうすると匿名性によって $F(\mathbf{p}^2) = F(\mathbf{p}^1)$ でなければならない。

$I(\mathbf{p}, \mathbf{p}^1) = M \cup K, I(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2) = M$ であるから距離の調和性によって $D(\mathbf{p}, \mathbf{p}^1) < D(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2)$ であり, したがって近接性の保存条件によって $0 \leq d(F(\mathbf{p}), F(\mathbf{p}^1)) \leq d(F(\mathbf{p}^1), F(\mathbf{p}^2)) = 0$ でなければならないので $F(\mathbf{p}^1) = F(\mathbf{p})$ が得られる。

集合 M について以下の2つのケースが考えられる。

(1). ケース1: $M = \emptyset$ の場合

このときは $I(\mathbf{p}', \mathbf{p}^2) = K, I(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2) = \emptyset$ であるから距離の調和性によって $D(\mathbf{p}', \mathbf{p}^2) < D(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2)$ であり, したがって近接性の保存条件によって $0 \leq d(F(\mathbf{p}'), F(\mathbf{p}^2)) \leq d(F(\mathbf{p}^1), F(\mathbf{p}^2)) = 0$ でなければならないので $F(\mathbf{p}^2) = F(\mathbf{p}')$ が得られる。

(2). ケース2: $M \neq \emptyset$ の場合

選好の組み合わせ \mathbf{p}^3 として K と L の人々は \mathbf{p}' と同じ選好を持ち, M の人々は \mathbf{p} と同じ選好を持つようなものを考える。そのとき $I(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2) = M, I(\mathbf{p}^2, \mathbf{p}^3) = K \cup M$ であるから $D(\mathbf{p}^2, \mathbf{p}^3) < D(\mathbf{p}^2, \mathbf{p}^1)$ となり, 近接性の保存条件によって $0 \leq d(F(\mathbf{p}^2), F(\mathbf{p}^3)) \leq d(F(\mathbf{p}^2), F(\mathbf{p}^1)) = 0$ から $F(\mathbf{p}^2) = F(\mathbf{p}^3)$ が得られる。

選好の組み合わせ \mathbf{p}^4 として, L の人々の内 M と同じ人数の人々 (1人であるが) が \mathbf{p} と同じ選好を持ち, 他の人々 (M, L の人々を含めて) は \mathbf{p}' と同じ選好を持つようなものをとる。すると匿名性によって $F(\mathbf{p}^4) = F(\mathbf{p}^3)$ でなければならない。また $I(\mathbf{p}^4, \mathbf{p}') = K \cup M \cup L'$ (L' は L から M と同じ人数の人々を除いた集合), $I(\mathbf{p}^4, \mathbf{p}^3) = K \cup L'$ であるから $D(\mathbf{p}^4, \mathbf{p}') < D(\mathbf{p}^4, \mathbf{p}^3)$ となる。したがって近接性の保存条件によって $0 \leq d(F(\mathbf{p}^4), F(\mathbf{p}')) \leq d(F(\mathbf{p}^4), F(\mathbf{p}^3)) = 0$ となるから $F(\mathbf{p}^4) = F(\mathbf{p}')$ を得る。

ケース1の場合 $F(\mathbf{p}) = F(\mathbf{p}^1) = F(\mathbf{p}^2) = F(\mathbf{p}')$ が得られる。ケース2の場合 $F(\mathbf{p}) = F(\mathbf{p}^1) = F(\mathbf{p}^2) = F(\mathbf{p}^3) = F(\mathbf{p}^4) = F(\mathbf{p}')$ が得られる。いずれの場合も全員一致性との間に矛盾が生じる^{*43}。 ☺

4.3.3 近接性の保存3 (距離の単調性)

さらに別の距離の定義にもとづく定理を見る^{*44}。個人の選好および選好の組み合わせ, 社会的選好の距離を以下のように定義する。

個人の選好, および社会的選好の距離 2つの選好 p, p' の距離を $d(p, p')$ で表す。同様に p, p'' の距離は $d(p, p'')$ と表される。

選好の組み合わせの距離 2つの選好の組み合わせ \mathbf{p}, \mathbf{p}' の距離を $D(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ で表す。

^{*42} 要するに全体が偶数なら M は空集合, 奇数なら M は1人。

^{*43} 全員一致性によって $p \neq p'$ ならば $F(\mathbf{p}) \neq F(\mathbf{p}')$ でなければならない。

^{*44} 以下の内容は Eckert and Lane(2002) による。

これらの距離について最低限次の条件をおく。

$$p \neq p' \text{ のとき } d(p, p') > d(p, p)$$

および

$$\mathbf{p} \neq \mathbf{p}' \text{ のとき } D(\mathbf{p}, \mathbf{p}') > D(\mathbf{p}, \mathbf{p})$$

また、選好の組み合わせの距離に対してある種の単調性を仮定する。

距離の単調性 (monotonicity) 2つの異なる選好の組み合わせ \mathbf{p}, \mathbf{p}' において選好が異なる人々の集合を $\Delta(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \{l : p_l \neq p'_l\}$ と表す。任意の3つの選好の組み合わせ $\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{p}''$ について $\Delta(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \subset \Delta(\mathbf{p}, \mathbf{p}'')$ かつ $\Delta(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \cap \Delta(\mathbf{p}', \mathbf{p}'') = \emptyset$ ならば $D(\mathbf{p}, \mathbf{p}'') > D(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ である。

この条件は以下のことを意味する。 \mathbf{p} と \mathbf{p}' とで異なる選好を持つ人々は \mathbf{p}' と \mathbf{p}'' とでは同じ選好を持ち (したがって \mathbf{p} と \mathbf{p}'' とでも異なる選好を持つ)、さらに \mathbf{p} と \mathbf{p}' とで同じ選好を持っていて \mathbf{p} と \mathbf{p}'' とで異なる選好を持つ人がいるならば \mathbf{p} と \mathbf{p}'' との距離は \mathbf{p} と \mathbf{p}' との距離よりも大きい。

ここではパレート原理にかえて次のような条件について考察する。

非賦課性 (non-imposition) 人々の選好の組み合わせにかかわらず社会的厚生関数が同一の選好を選ぶときそれは賦課的であると言う。この条件は社会的厚生関数が賦課的ではないことを求める。すなわち社会的厚生関数は少なくとも2つ以上の選好を選ぶ。

その上で近接性の保存条件を定義する (これは前のものと同一である)。

近接性の保存 任意の3つの選好の組み合わせ $\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{p}''$ について、 $D(\mathbf{p}, \mathbf{p}'') > D(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ であるときに $d(F(\mathbf{p}), F(\mathbf{p}'')) > d(F(\mathbf{p}), F(\mathbf{p}'))$ とはならない。

以上の準備のもとに次の定理を示す。社会的厚生関数は F で表す。

定理 4.12. 匿名性、非賦課性、近接性の保存条件を満たす社会的厚生関数は存在しない。

証明. 非賦課性によって少なくとも2つの選好 p, p' について $F(\mathbf{p}) = p, F(\mathbf{p}') = p'$ となるような選好の組み合わせ \mathbf{p}, \mathbf{p}' がある。1人1人の選好が個人1から順に \mathbf{p} における選好から \mathbf{p}' における選好へ変化する過程で、ある個人 i の選好の変化によって社会的選好が p とは異なるものになる。それを p' とする。その個人 i の選好が変化する前と後の選好の組み合わせを $\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1$ で表す。 \mathbf{p}^0 と \mathbf{p}^1 を比較すると個人 i の選好のみが異なっている、すなわち $\Delta(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1) = \{i\}$ 。ここで次の2つのケースに分けて考える。

(1). $i = 1$ ではないとき。さらに2つのケースに分ける。

(i) \mathbf{p} における個人 i の選好と \mathbf{p}' における個人 $i-1$ の選好が異なるとき

選好の組み合わせ \mathbf{p}^2 として、個人 i が \mathbf{p}' における個人 $i-1$ の選好を持ち個人 $i-1$ が \mathbf{p} における個人 i の選好を持つようなものを考えると、匿名性によって $F(\mathbf{p}^2) = F(\mathbf{p}^0)$ であるが、一方 $\Delta(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^2) = \{i-1, i\}$ であるから近接性の保存によって $d(F(\mathbf{p}^0), F(\mathbf{p}^2)) \geq d(F(\mathbf{p}^0), F(\mathbf{p}^1))$ ($F(\mathbf{p}^0) = p, F(\mathbf{p}^1) = p'$) でなければならない。しかし、そうすると $F(\mathbf{p}^2) = F(\mathbf{p}^0)$ と矛盾する。

(ii) \mathbf{p} における個人 i の選好と \mathbf{p}' における個人 $i-1$ の選好が同一であるとき

選好の組み合わせ \mathbf{p}^2 として、個人 i が \mathbf{p}' における個人 $i-1$ の選好を持ち個人 $i-1$ が同じく \mathbf{p}' における個人 i の選好を持つようなものを考えると、匿名性によって $F(\mathbf{p}^2) = F(\mathbf{p}^1)$ であるが、一方 $\Delta(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2) = \{i-1, i\}$ であるから近接性の保存によって $d(F(\mathbf{p}^1), F(\mathbf{p}^2)) \geq d(F(\mathbf{p}^0), F(\mathbf{p}^1))$ でなければならない。しかし、そうすると $F(\mathbf{p}^2) = F(\mathbf{p}^1)$ と矛盾する。

(2). $i = 1$ のとき。さらに 2 つのケースに分ける。

(i) \mathbf{p} における個人 1 の選好と \mathbf{p} における個人 2 の選好が異なるとき

選好の組み合わせ \mathbf{p}^2 として、個人 1 が \mathbf{p} における個人 2 の選好を持ち個人 2 が同じく \mathbf{p} における個人 1 の選好を持つようなものを考えると、匿名性によって $F(\mathbf{p}^2) = F(\mathbf{p}^0)$ であるが、一方 $\Delta(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^2) = \{i - 1, i\}$ であるから近接性の保存によって $d(F(\mathbf{p}^0), F(\mathbf{p}^2)) \geq d(F(\mathbf{p}^0), F(\mathbf{p}^1))$ ($F(\mathbf{p}^0) = p$, $F(\mathbf{p}^1) = p'$) でなければならない。しかし、そうすると $F(\mathbf{p}^2) = F(\mathbf{p}^0)$ と矛盾する。

(ii) \mathbf{p} における個人 1 の選好と \mathbf{p} における個人 2 の選好が同一であるとき

選好の組み合わせ \mathbf{p}^2 として、個人 1 が \mathbf{p} における個人 2 の選好を持ち個人 2 が \mathbf{p}' における個人 1 の選好を持つようなものを考えると、匿名性によって $F(\mathbf{p}^2) = F(\mathbf{p}^1)$ であるが、一方 $\Delta(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2) = \{i - 1, i\}$ であるから近接性の保存によって $d(F(\mathbf{p}^1), F(\mathbf{p}^2)) \geq d(F(\mathbf{p}^0), F(\mathbf{p}^1))$ でなければならない。しかし、そうすると $F(\mathbf{p}^2) = F(\mathbf{p}^1)$ と矛盾する。

☺

次に上記の定理が匿名性より弱い次の条件のもとでも成り立つことを示す*45。

拒否権者の非存在 (no-veto condition) ある選好の組み合わせ \mathbf{p} のとき $F(\mathbf{p}) = p$ であるとする。非賦課性の仮定のもとでは、ある 1 人の個人 (個人 l とする) の選好の変化によって社会的厚生関数の選択が変わるような選好の組み合わせがある (社会的厚生関数に 2 つ以上の値があるので誰かの選好の変化によってその値が p から別のものになるような選好の組み合わせがあり、それが \mathbf{p} である)。その個人の選好が変化した後の選好の組み合わせを \mathbf{p}' , $F(\mathbf{p}') = p'$ とする。さらに個人 l の選好が \mathbf{p}' における選好と同じであれば他の人々の選好にかかわらず p が選ばれないとすると個人 l は拒否権を持つ。この条件はそのような拒否権を持つ個人が存在しないことを求めるものである。

以上の準備のもとで次の定理を示す。

定理 4.13. 拒否権者の非存在, 非賦課性, 近接性の保存条件を満たす社会的厚生関数は存在しない。

証明. 非賦課性によって少なくとも 2 つの選好 p , p' について $F(\mathbf{p}) = p$, $F(\mathbf{p}') = p'$ となるような選好の組み合わせ \mathbf{p} , \mathbf{p}' がある。1 人 1 人の選好が個人 1 から順に \mathbf{p} における選好から \mathbf{p}' における選好へ変化する過程で、ある個人 i の選好の変化によって社会的選好が p とは異なるものになる。それを p' とする。その個人 i の選好が変化する前と後の選好の組み合わせを \mathbf{p}^0 , \mathbf{p}^1 で表す。 \mathbf{p}^0 と \mathbf{p}^1 を比較すると個人 i の選好のみが異なっている、すなわち $\Delta(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1) = \{i\}$ 。拒否権者の非存在の条件によって個人 i の選好が \mathbf{p}' と同じままで $F(\mathbf{p}'') = F(\mathbf{p}) = p$ となるような選好の組み合わせ \mathbf{p}'' が存在する。 \mathbf{p}' においては個人 i 以外の人々の選好は \mathbf{p} と同一なので、 \mathbf{p}'' と \mathbf{p} とでは個人 i と少なくとももう 1 人の選好が異なる。これは近接性の保存条件に反する。

☺

4.3.4 近接性の保存 4 ((匿名性に沿った) 距離の単調性)

さらに少し異なった距離の定義にもとづく定理を紹介する*46。個人の選好および選好の組み合わせ、社会的選好の距離の定義は前の小節と同じである。再掲する。

個人の選好, および社会的選好の距離 2 つの選好 p , p' の距離を $d(p, p')$ で表す。

*45 以下の内容は Baigent and Eckert (2001) による。

*46 以下の内容は Eckert (2004) による。

選好の組み合わせの距離 2つの選好の組み合わせ \mathbf{p}, \mathbf{p}' の距離を $D(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ で表す。

上の方の距離について以下の条件をおく。

$$p \neq p' \text{ のとき } d(p, p') > d(p, p)$$

ここで選好の組み合わせの距離に対して前の小節とは異なる意味での単調性を仮定する。

(匿名性に沿った) 距離の単調性 (anonymous monotonicity) 2つの異なる選好の組み合わせ \mathbf{p}, \mathbf{p}' において選好が異なる人々の集合を $\Delta(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \{l : p_l \neq p'_l\}$ とし、その集合に含まれる人々の数を $|\Delta(\mathbf{p}, \mathbf{p}')|$ と表す。ただし選好を適当に並べ替えて同じになる場合は異なる選好とは見なさない。正確に言えば \mathbf{p}' における人々の選好をいろいろ並べかえて \mathbf{p} と異なる選好の持つ人々の数の最小値を $|\Delta(\mathbf{p}, \mathbf{p}')|$ とする。任意の3つの選好の組み合わせ $\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{p}''$ について $|\Delta(\mathbf{p}, \mathbf{p}'')| > |\Delta(\mathbf{p}, \mathbf{p}')|$ ならば $D(\mathbf{p}, \mathbf{p}'') > D(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ であることを求める。この条件は匿名性を単調性の定義の中に組み込んだものであり、2つの選好の組み合わせにおいて何人かの選好が異なってもそれが並べ替えただけのものならば選好の組み合わせの間の距離は0であると見なす。

近接性の保存条件は前のものと同一である。

近接性の保存 任意の3つの選好の組み合わせ $\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{p}''$ について、 $D(\mathbf{p}, \mathbf{p}'') > D(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ であるときに $d(F(\mathbf{p}), F(\mathbf{p}')) > d(F(\mathbf{p}), F(\mathbf{p}''))$ とはならない。

また、次の意味での拒否権者の非存在条件をおく。

(全員一致性に沿った) 拒否権者の非存在 (no-veto with respect to unanimous profiles) 全員の選好が同一であるようなある選好の組み合わせ \mathbf{p} において $F(\mathbf{p}) = p$ であり (F は社会的厚生関数)、あるグループの人々の選好の変化によって社会的厚生関数の選択が変わるものとする。そのようなグループの内最も小さい (人数が少ない) ものを G で表し、 G の人々の選好の変化によって社会的厚生関数の選択が変わった後のある選好の組み合わせを \mathbf{p}' とする。 G は \mathbf{p} によって異なるかもしれないが、それらの内最も小さいものを改めて G とする。もし、グループ G の人々の選好が \mathbf{p}' における選好と同じならば他の人々の選好にかかわらず p が選ばれないとすると、グループ G は拒否権を持つことになる。この条件はそのような意味での拒否権を持つグループが存在しないことを求めるものである。

さらにここでは全員一致性を仮定する。すなわち全員の選好が同一であれば社会的厚生関数もそれと同じ選好を選ぶ。

上の G は全員からなる集合ではない。そうであるとしてみよう。全員が p の選好を持てば F は p を選び、全員が p と異なる p' の選好を持てば F は p' を選ぶ。したがって個人の選好が p から p' へ1人ずつ変わる過程のどこかで F の選択は変わる (すぐ p' になるとは限らない)。そこまで選好が p' に変化した人々の集合が G の候補となる。もし全員の選好が p' になったときに F の選択が p から p' に変わるのであれば、その過程を逆に辿ると1人の選好の変化によって F の選択が変わることになる。したがって G は全員からなる集合よりは小さく、 G に含まれない人々も存在する。

以上の準備のもとに次の定理を示す。

定理 4.14. (全員一致性に沿った) 拒否権者の非存在, 全員一致性, (匿名性に沿った) 距離の単調性によって定義された近接性の保存条件を満たす社会的厚生関数は存在しない。

証明. 全員の選好が同一であるようなある選好の組み合わせ \mathbf{p} において $F(\mathbf{p}) = p$ であり, 上記のグループ G の人々の選好の変化によって F の選択が変わるものとする。変化した後の選好を \mathbf{p}' とする。 G は拒否権を持たないので G の人々の選好が \mathbf{p}' のままで他の人々の選好が \mathbf{p} の選好から変化して F が p を選ぶ場合がある。そのときの選好の組み合わせを \mathbf{p}'' とすると $|\Delta(\mathbf{p}, \mathbf{p}')| > 0$ ($|\Delta(\mathbf{p}, \mathbf{p}')|$ は G の人々の人数), $|\Delta(\mathbf{p}', \mathbf{p}'')| > 0$ (≥ 1) である。このとき $|\Delta(\mathbf{p}, \mathbf{p}'')| = |\Delta(\mathbf{p}, \mathbf{p}')| + |\Delta(\mathbf{p}', \mathbf{p}'')|$ であるから $|\Delta(\mathbf{p}, \mathbf{p}'')| > |\Delta(\mathbf{p}, \mathbf{p}')|$ なので $D(\mathbf{p}, \mathbf{p}'') > D(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ でなければならない。そのとき近接性の保存条件によって $d(F(\mathbf{p}), F(\mathbf{p}'')) > d(F(\mathbf{p}), F(\mathbf{p}'))$ でなければならないが, 一方 $F(\mathbf{p}) = F(\mathbf{p}'') = p \neq F(\mathbf{p}')$ であるから矛盾が生じる。☺

参考文献

- N. Baigent, "Preference proximity and anonymous social choice", *Quarterly Journal of Economics*, 1987.
- N. Baigent and D. Eckert, "Abstract aggregations and proximity preservation: An impossibility result", *Theory and Decision*, 近刊.
- G. Chichilnisky, "Structural instability of decisive majority rules", *Journal of Mathematical Economics*, 1982.
- G. Chichilnisky, "The topological equivalence of the Pareto condition and the existence of a dictator", *Journal of Mathematical Economics*, 1982.
- D. Eckert, "Proximity Preservation in an Anonymous Framework." *Economics Bulletin*, Vol. 4, No. 6, 2004
- D. Eckert and B. Lane, "Anonymity, ordinal preference proximity and imposed social choices", *Social Choice and Welfare*, 2002.
- F. Grafe and J. Grafe, "Social welfare functions which preserve distances", *Social Choice and Welfare*, 2001.
- L. Lauwers, "Topological social choice", *Mathematical Social Sciences*, 2000.
- P. Mehta, "Topological methods in social choice: an overview", *Social Choice and Welfare*, 1997.
- G. L. Naber, "Topological methods in Euclidean spaces" (2000, Dover Publications)
- J. J. Rotman, "An introduction to algebraic topology" (1988, Springer Verlag)
- 国吉秀夫 (高橋豊文校訂), 「群論入門 (新訂版)」(2001, サイエンス社)
- 小林貞一, 「トポロジー」(1987, 近代科学社)
- 小宮克弘, 「位相幾何入門」(2001, 裳華房)
- 小山昭雄, 「経済数学教室 3 (線型代数と位相上)」(1994, 岩波書店)
- 志賀浩二, 「群論への 30 講」(1989, 朝倉書店)
- 瀬山士郎, 「トポロジー: 柔らかい幾何学 (増補版)」(2003, 日本評論社)
- 田村一郎, 「トポロジー (岩波全書)」(1972, 岩波書店)
- 二階堂副包, 「現代経済学の数学的方法」(1960, 岩波書店)
- 二階堂副包, "Convex structures and economic theory"(1968, Academic Press)
- 栞田幹也, 「代数的トポロジー」(2002, 朝倉書店)
- 森田紀一, 「位相空間論 (岩波全書)」(1981, 岩波書店)

索引

L

Lebesgue の補題, 20, 48

あ

アーベル群, 2
アフィン独立, 11

い

位数, 2
位相空間のホモロジー群, 52
位相空間の連結性, 27

か

可換群, 2
加群, 2
完全系列, 36

き

幾何学的に独立, 11
逆元, 2
球と球面のホモロジー群, 52
境界準同型, 22
拒否権者の非存在, 63
距離の単調性, 68
距離の単調性 (匿名性に沿った), 70
距離の調和性, 66
近接性の保存, 64, 66, 67

く

群, 2
群の直積, 11

け

結合法則, 2
決定的多数決性, 63

こ

交換法則, 2
恒等写像, 45

さ

鎖群, 21
鎖写像, 38
鎖複体, 38

し

社会的厚生関数, 59
写像度, 58
重心座標, 12
巡回群, 5
準同型, 8
準同型定理, 9
商群, 7
剰余類, 5

す

推移性, 59

せ

正規同型, 46
正規部分群, 6
星状体, 19
積空間の連結性, 30
全員一致性, 61

た

第一同型定理, 10
第二同型定理, 10
単位元, 2
単体近似, 19
単体近似定理, 20
単体写像, 15
単体的複体, 11
単体的複体の重心分割のホモロジー群, 45
単体的複体の積空間, 49
単体的複体の連結性, 33
単体の重心分割, 16

ち

直和, 11

て

定値写像, 58

と

同型, 8
同値関係, 8
匿名性, 61

は

パレート原理, 61

ひ

左剰余類, 5
非賦課性, 68

ふ

部分群, 4

へ

閉包 (相対位相の意味での), 30

ほ

包含写像, 37, 59
包含準同型, 37
ホモトピー型, 49
ホモトピー同値, 48
ホモトピー同値写像, 49
ホモロジー群, 23
ホモロジー群と写像度, 58
ホモロジー群のホモトピー型不変性, 48

ま

マイヤー・ビートリス完全系列, 46

み

右剰余類, 5

む

無限群, 2
無限巡回群, 5

ゆ

ユークリッド空間における点の位置関係, 11
有限群, 2
有限巡回群, 5
誘導準同型, 27, 47

よ

弱い正の反応性, 61

れ

連続性, 60

著者略歴

田中靖人 (たなか・やすひと)

1953年 大阪府岸和田市生まれ

1976年 京都大学工学部航空工学科卒業

1983年 横浜国立大学大学院経済学研究科修士課程修了

1986年 東京大学大学院経済学研究科博士課程単位修得

その後 山形大学人文学部経済学科講師・助教授
中央大学法学部助教授・教授を経て

現在 同志社大学経済学部教授, 博士・経済学 (中央大学)

専攻 理論経済学, 社会的選択理論, ゲーム理論とその応用

著書

『ゼロから始める経済学 (改訂版)』 (中央大学生協出版局, 2000)

『ゼロから始める国際経済学 (改訂版)』 (中央大学生協出版局, 2000)

『ゲーム理論と寡占』 (中央大学出版部, 2001)

主要論文

“Tariffs and welfare of an exporting country in a free entry oligopoly under integrated markets”, *Oxford Economic Papers*, Vol. 44, Oxford University Press, 1992.

“Export subsidies under dynamic duopoly”, *European Economic Review*, Vol. 38, Elsevier, 1994.

“Long run equilibria in an asymmetric oligopoly”, *Economic Theory*, Vol. 14, Springer-Verlag, 1999.

“A finite population ESS and long run equilibria in an n players coordination game”, *Mathematical Social Sciences*, Vol. 39, Elsevier, 2000.

“Stochastically stable states in an oligopoly with differentiated goods: Equivalence of price and quantity strategies”, *Journal of Mathematical Economics*, Vol. 34, Elsevier, 2000.

“Profitability of price and quantity strategies in a duopoly with vertical product differentiation”, *Economic Theory*, Vol. 17, Springer-Verlag, 2001.

“Profitability of price and quantity strategies in an oligopoly”, *Journal of Mathematical Economics*, Vol. 35, Elsevier, 2001.

“Evolution to equilibrium in an asymmetric oligopoly with differentiated goods”, *International Journal of Industrial Organization*, Vol. 19, Elsevier, 2001.

“An alternative direct proof of Gibbard’s random dictatorship theorem”, *Review of Economic Design*, Vol. 8, Springer-Verlag, 2003.

“Oligarchy for social choice correspondences and strategy-proofness”, *Theory and Decision*, Vol. 55, Kluwer Academic Publishers, 2003.

E-mail: yatanaka@mail.doshisha.ac.jp

<http://www1.doshisha.ac.jp/yatanaka/index.html>