25

社会的選択理論の種々相

同志社大学 経済学部

田中 靖人

yatanaka@mail.doshisha.ac.jp

2006 年 1 月 7 日

まえがき

本稿は先に発行した「社会的選択理論の諸相」(同志社大学経済学部ワーキング・ペーパー No. 20，以下「諸相」として参照）の続編であり，やはり社会的選択理論 (Social Choice Theory) の主要な定理，結果およびそれらに関連した結果についてオリジナルな論文を取り上げ，原論文の論旨に沿いながら定理の証明を詳細に解説しようとするものである。「諸相」と合わせて社会的選択理論の古典的および最近の研究のある程度の部分をカバーできていると思うが，筆者自身の関心と知識から自ずと偏りがあるであろう。メカニズムデザイン論については詳しくは学んでいないのでここでは基本文献である Maskin の研究のみを紹介した。Chichilnisky による代数トポロジーを用いた社会的選択理論研究の一部は「代数トポロジーと社会的選択理論（前編）」(同志社大学経済学部ワーキング・ペーパー No. 19）でも紹介している。またそれにはホモロジー群を中心に必要な数学の解説も（筆者の力の及ぶ範囲で）含めてあるので参考にしていただきたい。

2006 年 1 月 7 日　田中靖人

目次

1 無数の人々がいる場合のアローの定理 (Kirman and Sondermann (1972))

実際には人々が無数にいるなどということはないがそのような場合に論理的にどうなるかを考えてみよう*1。

選択肢を x，y などで，人々を i，j などで，人々の集合を V で，個人の選好を R_i，R_i' などで，選好のプロフィールを p，p' などで，社会的厚生関数を f で，個人 i の選好の集合を $\mathscr{R}_i$ で，プロフィールの集合を $\mathscr{R}^n$ で，社会的選好とその集合を R と $\mathscr{R}$ で表す。アローの定理の前提条件を整理すると次のようになる。

(1). (A1) 選択肢の数は 3 つ以上。

(2). (A2) 社会的厚生関数 f は $\mathscr{R}^n$ から $\mathscr{R}$ への関数であり，社会的選好は反射性，完備性，推移性を満たす。

(3). (A3)「パレート原理」：任意の選択肢の組 (x, y) について，全員が y より x を好めば社会的にも y より x が好まれる。

(4). (A4)「無関係選択肢からの独立性 (IIA)」：任意の選択肢の組 (x, y) に関する社会的選好はそれらについての人々の選好のみによって決まる。他の選択肢の存在は影響しない。

(5). (A5)「独裁者がいないこと」：常に（あらゆるプロフィールにおいて）ある 1 人の人の厳密な選好が社会的選好と一致するならばその人は独裁者である。そのような独裁者は存在しない。

アローの定理は，人々の数が有限の場合にはこれらの条件のすべてを満たす社会的厚生関数は存在しないことを主張する。

無限の人口の場合を調べるために「フィルター (filter)」という概念を定義する。

フィルター (filter) ある集合 V の部分集合の集まり（集合の集合）$\mathscr{F}$ が次の条件を満たすとき V 上のフィルターであると言う。

(1). F1：$A \subset B$ で $A \in \mathscr{F}$ ならば $B \in \mathscr{F}$ である。したがって $V \in \mathscr{F}$ である。

(2). F2：$A,\ B \in \mathscr{F}$ ならば $A \cap B \in \mathscr{F}$（$\mathscr{F}$ に含まれる 2 つの集合の共通部分も $\mathscr{F}$ に含まれる）。

(3). F3：$\mathscr{F}$ は空集合を含まない，すなわち $\emptyset \in \mathscr{F}$。

フィルター $\mathscr{F}$ に含まれる集合すべての共通部分が空集合でないとき，すなわちある要素（ここでは個人）a があってすべての $A \in \mathscr{F}$ について $a \in A$ となる場合にはそのフィルターは固定フィルター (fixed filter) であると言う。V が有限個の要素しか持たない場合はその部分集合も有限個しかない（V の要素の数を k とすると最大でも $2^k - 1$ 個）*2。$\mathscr{F}$ に含まれる集合に (2) を順に適用

*1 本節は A. P. Kirman and D. Sondermann, “Arrow's theorem, many agents, and invisible dictators”, *Journal of Economic Theory*, vol. 5, pp. 267-277, 1972. にもとづく。

*2 V のある部分集合がある要素を含むか含まないかの 2 通りあるから全部で 2^k 通りの場合がある。しかしすべての

すると最後にすべての集合に共通な部分が空集合でない形で残る。しかし V が無限の要素を持つ場合は $\mathscr{F}$ も無限個の集合を含む可能性があり，その場合はどのような有限個の集合をとっても空でない共通部分はあるが，すべての集合の共通部分はないかもしれない。そのようなときにはフィルターは自由 (free) フィルターであると言う。V が無限個の要素を持っていても，また $\mathscr{F}$ が無限個の集合を含んでいてもフィルターが固定フィルターである場合もある。例えばある特定の要素 v_0 を含むあらゆる集合の集まりはフィルターになるが，これは固定フィルターである。

ある集合 V のフィルター $\mathscr{F}$ と $\mathscr{G}$ があって $\mathscr{F}\subset\mathscr{G}$ であるとき（$\mathscr{F}$ に含まれる集合のすべてが $\mathscr{G}$ に含まれる）$\mathscr{G}$ は $\mathscr{F}$ より細かい (finer) と言う。さらに $\mathscr{F}\neq\mathscr{G}$（$\mathscr{G}$ は $\mathscr{F}$ に含まれる集合以外の集合を含んでいる）ならば $\mathscr{G}$ は $\mathscr{F}$ より厳密に細かい (strictly finer) と言う。V のフィルター $\mathscr{F}$ があって，それより厳密に細かい V のフィルターがないとき $\mathscr{F}$ は V の超フィルター (ultra filter) であると言う。V のすべての超フィルターの集合を $\tilde{V}$ とする。まず超フィルターに関して次の補題を示す。

補題 1.1. V 上のフィルター $\mathscr{F}$ が次の条件を満たせば超フィルターである。

$F4$：V の部分集合 A について $A\in\mathscr{F}$ か，さもなくば $V\setminus A\in\mathscr{F}$ である。

証明. $\mathscr{F}$ より細かい V のフィルターがあると仮定し，それを $\mathscr{G}$ とする。任意に $A\in\mathscr{G}$ をとって $V\setminus A\in\mathscr{F}$ であるとすると $\mathscr{F}\subset\mathscr{G}$ であるから $V\setminus A\in\mathscr{G}$ となるが，そのとき $A\in\mathscr{G}$ と合わせて $A\cap(V\setminus A)=\emptyset\in\mathscr{G}$ となってしまって矛盾が生じる。したがって $V\setminus A\notin\mathscr{F}$ でなければならず F4 によって $A\in\mathscr{F}$ が得られる。すなわち $\mathscr{G}$ に含まれる集合は $\mathscr{F}$ に含まれるから $\mathscr{G}\subset\mathscr{F}$ が得られるので，$\mathscr{F}$ は超フィルターである。☺

以上の準備のもとに次の定理を示す。

定理 1.1. (1). 任意の社会的厚生関数に対して次の性質を持つ超フィルター $\mathscr{U}$ が 1 つだけ存在する。

すべての $U\in\mathscr{U}$，任意の選択肢の組 (x,y)，任意のプロフィール p について
U に含まれる人々（i で表す）の選好が xP_iy のとき（以下これを xP_Uy と書く）
社会的選好も xPy である。

(2). $\tilde{V}$ に含まれるすべての超フィルター $\mathscr{U}$ のそれぞれについて (1) が成り立つような社会的厚生関数が存在する。

定理の証明の前に 2 つの補題を示す。任意の社会的厚生関数 f について次の 3 つのフィルターを考える。

$\mathscr{U}=\{U\subset V:$ ある (x,y) と，あるプロフィール p について U に含まれる人々の選好は xP_Uy で $V\setminus U$ の人々（j で表す）の選好は yP_jx（これを $yP_{U^c}x$ と書く），かつ社会的に $xPy\}$

要素を含まない空集合はフィルターに含まれないので最大でも 2^k-1 個である。

$$\mathscr{U}' = \{U \subset V : \text{ある } (x,y) \text{ と，すべてのプロフィール } p \text{ について } xP_U y \text{ かつ } yP_{U^c}x \text{ ならば社会的に } xPy\}$$

$$\mathscr{U}'' = \{U \subset V : \text{すべての } (x,y) \text{ と，すべてのプロフィール } p \text{ について } xP_U y \text{ かつ } yP_{U^c}x \text{ ならば社会的に } xPy\}$$

これらは異なるようであるが実は次の補題が成り立つ。

補題 1.2.

$$\mathscr{U} = \mathscr{U}' = \mathscr{U}''$$

である。

証明. $\mathscr{U}''$ の条件が成り立てば $\mathscr{U}'$ の条件が成り立ち，$\mathscr{U}'$ の条件が成り立てば $\mathscr{U}$ の条件が成り立つので $\mathscr{U}'' \subset \mathscr{U}' \subset \mathscr{U}$ が言える。逆を示さなければならない。A4 の条件 (IIA) により $\mathscr{U}$ の条件が成り立てば $\mathscr{U}'$ の条件も成り立つ（(x,y) に関する社会的選好はそれらについての人々の選好だけで決まる）から $\mathscr{U} \subset \mathscr{U}'$ が言える。したがって $\mathscr{U}' \subset \mathscr{U}''$ を示せば証明が完結する。$U \in \mathscr{U}'$ と選択肢 $z \neq x,y$ をとり，あるプロフィール p において

$$xP_U yP_U z,\ yP_{U^c} zP_{U^c} x$$

であるとする。$\mathscr{U}'$ の条件と A4 により xPy，A3（パレート原理）によって yPz であるから推移性により xPz となる。別のプロフィール p' において

$$zP'_U xP'_U y,\ yP'_{U^c} zP'_{U^c} x$$

であるとする。$\mathscr{U}'$ の条件と A4 により $xP'y$，A3 によって $zP'x$ であるから推移性により $zP'y$ となる。別のプロフィール p'' において

$$zP''_U yP''_U x,\ yP''_{U^c} xP''_{U^c} z$$

であるとする。上の結果と A4 により $zP''y$，A3 によって $yP''x$ であるから推移性により $zP''x$ となる。別のプロフィール p^1 において

$$yP^1_U xP^1_U z,\ zP^1_{U^c} yP^1_{U^c} x$$

であるとする。（xPz を導いた）上の結果と A4 により xP^1z，A3 によって yP^1x であるから推移性により yP^1z となる。別のプロフィール p^2 において

$$yP^2_U zP^2_U x,\ zP^2_{U^c} xP^2_{U^c} y$$

であるとする。上の結果と A4 により yP^2z，A3 によって zP^2x であるから推移性により yP^2x となる。さらに $w \neq x,y,z$ としてプロフィール p^3 において

$$zP^3_U yP'_U w,\ yP^3_{U^c} wP'_{U^c} z$$

であるとすると，（$zP'y$ を導いた）上の結果と A4 により zP^3y，A3 によって yP^3w であるから推移性により zP^3w となる。z，w は任意であるから以上によって $\mathscr{U}''$ の条件が成り立つことが示された。したがって $\mathscr{U}' \subset \mathscr{U}''$ となるから $\mathscr{U} = \mathscr{U}' = \mathscr{U}''$ を得る。 ☺

次に以下の補題を示す。

補題 1.3. 上記の $\mathscr{U}$ は V の超フィルターである。

証明. A3 によって空集合は上の $\mathscr{U}$ には含まれない。これで F3 が示された。

次に $U, W \in \mathscr{U}$ をとって V を次のように分ける。

(1). $V_1 = U \cap W$
(2). $V_2 = U \cap V \setminus W$
(3). $V_3 = W \cap V \setminus U$
(4). $V_4 = V \setminus (U \cup W)$

(x, y, z) に関する次のようなプロフィール p を考える。

$$zP_{V_1}xP_{V_1}y,\ xP_{V_2}yP_{V_2}z,\ yP_{V_3}zP_{V_3}x,\ yP_{V_4}xP_{V_4}z$$

$U = V_1 \cup V_2 \in \mathscr{U} = \mathscr{U}''$（$x$ と y について $\mathscr{U}$ の条件に当てはまる。U は $\mathscr{U}$ に含まれる集合であると仮定されている）であるから xPy である。同様に $W = V_1 \cup V_3 \in \mathscr{U} = \mathscr{U}''$（$z$ と x について $\mathscr{U}$ の条件に当てはまる。W も $\mathscr{U}$ に含まれる集合であると仮定されている）なので zPx であるから，推移性によって zPy となる。そのとき V_1 が $\mathscr{U}$ の条件を満たすから $V_1 = U \cap W \in \mathscr{U}$ であり F2 が成り立つ。

次に F4 を示す。以下のようなプロフィールを考える。

(1). U に含まれる人々：xP_UzP_Uy
(2). それ以外（$U^c = V \setminus U$ に含まれる人々）：yP_UxP_Uz

A3 により社会的選好は xPz である。xPy であるか，yPx または xIy であるが，後者の場合は推移性により yPz が得られる。xPy のとき U の人々のみが y より x を好むので $U \in \mathscr{U}$ であり，yPz ならば U^c の人々のみが z より y を好むので $U^c \in \mathscr{U}$ である。したがって F4 が成り立つ。

最後に F1 を示す。$W \supset U \in \mathscr{U}$ とする。F4 により $W \in \mathscr{U}$ または $W^c \in \mathscr{U}$ である。もし $W^c \in \mathscr{U}$ であれば F3 により $W^c \cap U \in \mathscr{U}$ でなければならないが $W^c \cap U = \emptyset$ であるから矛盾である。したがって $W \in \mathscr{U}$ でなければならず F1 が得られる。☺

定理の証明に入ろう。

定理 1.1 の証明.　(1). 上の 2 つの補題により

$$\mathscr{U} = \{U \subset V, \text{すべての } x, y \in X,\ \text{すべてのプロフィールについて } xP_Uy \text{ かつ } yP_{U^c}x \text{ ならば } xPy\}$$

は超フィルターである。プロフィール p について V を次のように分ける

(i) V_1 : $xP_{V_1}y$
(ii) V_2 : $yP_{V_1}x$
(iii) $V_3 = (V_1 \cup V_2)^c$

「$U \in \mathscr{U}$ かつ $xP_U y$ ならば xPy である（U^c の人々の選好に関わらず）」ことを示さなければならない。次のようなプロフィール p' を考える。

(i) $V_1 : xP'_{V_1} zP'_{V_1} y$
(ii) $V_2 : yP'_{V_2} zP'_{V_2} x$
(iii) $V_3 : xI'_{V_3} yP'_{V_3} z$

$U \subset V_1$ と考えることができるので F1 によって $V_1 \in \mathscr{U}$ である。したがって $zP'_{V_1}y$，$yP'_{V_2}z$，$yP'_{V_3}z$ は $zP'y$ を意味する。F1 によって $W = V_1 \cup V_3 \in \mathscr{U}$ であるから $xP'_W z$，$zP'_{W^c}x$ は $xP'z$ を意味する。推移性によって $xP'y$ を得る。

$\mathscr{U}$ と同じ性質を持つ $\mathscr{U}$ とは別の超フィルター $\mathscr{U}'$ があると仮定してみよう。そのとき $\mathscr{U}$ に含まれない $U \in \mathscr{U}'$ が存在する。そうすると F4 により $U^c \in \mathscr{U}$ でなければならないが，$\mathscr{U}$ と $\mathscr{U}'$ が同じ性質を持つはずであるからこれは矛盾である。

(2). ある超フィルター $\mathscr{U}$ が与えられたとき，それが上の証明で示したような性質を持つ社会的厚生関数（社会的選好）を持つことを示す。次のように社会的選好を定義する。

任意の (x, y)，任意のプロフィールについて，$xP_U y$ であるような $U \in \mathscr{U}$ が存在するとき，またそのときのみ xPy

この社会的選好について A3（パレート原理）と A4(IIA) が成り立つことに問題はない。また任意の 2 つの選択肢の組について社会的選好を決めることができるので完備性が満たされる。最後に推移性を証明しなければならない。社会的選好が

$$yR''x \text{ かつ } zR''y$$

であるようなプロフィール p'' を考える。このとき $B_1 = \{i | xP''_i y\}$ および $B_2 = \{i | yP''_i z\}$ はいずれも $\mathscr{U}$ に含まれない。したがって B_1^c，B_2^c が $\mathscr{U}$ に含まれ，それらの共通部分 $B_1^c \cap B_2^c$ も $\mathscr{U}$ に含まれる。そのときその補集合である $B_1 \cup B_2$ は $\mathscr{U}$ に含まれないから $B_3 = \{i | xP''_i z\} (\subset B_1 \cup B_2) \notin \mathscr{U}$ を得る[*3]。これは $zR''x$ を意味するので推移性が成り立つ。

☺

この定理からいくつかの結果が導かれる。

系 1.1. 上記の議論で作った超フィルター $\mathscr{U}$ が自由超フィルターのとき，またそのときにのみ A1~A4 に加えて A5 が成り立つ（独裁者がいない）。

証明. $\mathscr{U}$ が固定フィルターならばある個人 i がすべての $U \in \mathscr{U}$ に含まれている。どの個人 j についても $\{j\} \in \mathscr{U}$ か $\{j\}^c (= V \setminus \{i\}) \in \mathscr{U}$ であるが，すべての個人 j について $\{j\}^c \in \mathscr{U}$ のときは $\mathscr{U}$ は固定フィルターにはならない。ある個人 i について $\{i\} \in \mathscr{U}$ ならばその個人が独裁者である。またある個人 i が独裁者ならば i がすべての $U \in \mathscr{U}$ に含まれていなければならず固定フィルターが得られる。

☺

系 1.2. 人数が有限ならば必ず独裁者が存在する（アローの定理）。

---

*3 もし $B_3 \in \mathscr{U}$ なら $B_1 \cup B_2 \in \mathscr{U}$ となる。

証明. 人数が有限ならば超フィルターは固定フィルターでなければならない。 ☺

次の系では「ツォルンの補題」を用いる。ツォルンの補題は「選択公理」と同値であることが集合論の本に書かれている。選択公理は数学において「公理」であるからこれを仮定して議論が進められる。

■ツォルンの補題

> 「選択公理」：どれも空でないような集合を要素とする集合 (すなわち，集合の集合) があったときに，それぞれの集合から 1 つずつ要素を選び出して新しい集合を作ることができる。
>
> 「順序集合」：ある集合 A に次のような条件（順序の公理と呼ばれる）を満たす二項関係 $\leqq$ が定まっている時，対 $(A,\leqq)$ のことを順序集合と言う。
>
> 反射律: 任意の要素 a について $a\leqq a$。
> 推移律: $a\leqq b$ かつ $b\leqq c$ ならば $a\leqq c$。
> 反対称律: $a\leqq b$ かつ $b\leqq a$ ならば $a=b$。
>
> 「全順序」：順序集合 A の任意の 2 要素 a，b に対して，$a>b$，$a=b$，$a<b$ のどれか 1 つが成立する場合 $\leqq$ を全順序とよぶ。
>
> 「極大元と上界」：順序集合 A の要素 a が A の極大元であるとは，$a<x$ となる元 x が存在しないことをいう。部分集合 $B\subset A$ に対して，要素 $a\in A$ が B の上界であるとは，B のすべての要素 x について，$x\leqq a$ が成立することをいう。
>
> 「ツォルンの補題」：順序集合 A のすべての全順序部分集合に上界が存在すれば，A には極大元が存在する。

選択公理を仮定するとツォルンの補題が証明される。証明は省略する。

系 1.3. 人数が無限ならば A1~A4 に加えて A5 が成り立つような社会的厚生関数がある。

証明. 有限の人数からなる集合（空集合も含めて）の補集合をすべて含む「集合の集合」$\mathscr{U}_0$ を考える。まずこれはフィルターである[*4]。$\mathscr{U}_0$ を含む V のすべてのフィルター $\mathscr{U}$ の集合を $\mathscr{U}^*$ とすると，これは集合の包含関係を順序として順序集合になる。その部分集合で全順序集合となるものを考え，その 1 つを $\mathscr{D}$ とする。$\mathscr{D}$ に含まれるすべてのフィルターの和集合を $\bigcup_{\mathscr{U}\in\mathscr{D}}\mathscr{U}$ とする。これもフィルターとなる（すなわち $\bigcup_{\mathscr{U}\in\mathscr{D}}\mathscr{U}\in\mathscr{U}^*$ である）。

(1). $A\subset B$ として $A\in\bigcup_{\mathscr{U}\in\mathscr{D}}\mathscr{U}$ のとき，ある $\mathscr{U}$ について $A\in\mathscr{U}$ であるから $B\in\mathscr{U}$ である。
(2). $\mathscr{D}$ に含まれる 2 つのフィルターを $\mathscr{U}_1$，$\mathscr{U}_2$ とする。包含関係を順序とする全順序により $\mathscr{U}_1\subset\mathscr{U}_2$ または $\mathscr{U}_2\subset\mathscr{U}_1$ であるから，2 つの集合 A，B について $A\in\mathscr{U}_1$，$B\in\mathscr{U}_2$ ならば $A\cap B\in\mathscr{U}_1$ または $A\cap B\in\mathscr{U}_2$ である。

[*4] それぞれの集合は有限集合の補集合であるから 2 つの集合の共通部分も有限集合の補集合である。

(3). 空集合はどのフィルターにも含まれないので $\bigcup_{\mathscr{U}\in\mathscr{D}}\mathscr{U}$ にも含まれない。

したがって各 $\mathscr{D}$ は $\mathscr{U}^*$ に上界を持つから，ツォルンの補題によって $\mathscr{U}^*$ には極大元が存在する。それが $\mathscr{U}$ を含む超フィルターである。それを $\mathscr{U}_0$ とし，$\mathscr{U}_0$ に含まれる集合全体の共通部分を $\bigcap\mathscr{U}_0$ と書く。$\bigcap\mathscr{U}_0 \neq \emptyset$ であるとするとすべての $U \in \mathscr{U}_0$ に含まれる個人 i が存在する。しかしどの個人 j についても $V\setminus\{j\} \in \mathscr{U}_0$ であるから $\{j\} \notin \mathscr{U}_0$ であり矛盾が生じる。以上により $\mathscr{U}_0$ は自由超フィルターであるのでそれに対応した独裁者を持たない社会的選好がある。☺

独裁者が存在しない社会的選好はあり得る。しかし，その場合でもある（無限の人々を含む）グループが独裁的な力を持ち，さらにそのグループはいくらでも小さくできることが示される。V 上ですべての人々に等しい比重を与えるような測度（measure，確率分布のようなもの）を考え，V の部分集合 C について測度を $\lambda(C)$ と表す。

定理 1.2. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\lambda(C) < \varepsilon$ を満たし，すべての (x, y) について「xP_Cy ならば社会的選好は xPy」が成り立つような C が存在する。

証明. V の有限個の分割 $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ で各 U_i について $\lambda(U) < \varepsilon$ となるようなものをとることができる。超フィルター $\mathscr{U}$ をとるとただ 1 つの U_i が $\mathscr{U}$ に含まれる。その U_i が定理の条件を満たす。☺

2　非循環性，強い中立性と拒否権者 (Blau and Deb(*Econometrica*, 1977))

この節と次の節では非循環性と拒否権者に関する議論を見て行こう。まず「中立性」(「諸相」参照）を少し強くした条件を仮定し，選択肢の数が人々の数（有限とする）よりも少なくないときに拒否権者が存在するという Blau と Deb による議論を紹介する[*5]。ここでの中立性は次のように定義される。

強い中立性　プロフィール p において選択肢 y より x を好む人が p' において w より z を好み，またプロフィール p' において選択肢 z より w を好む人は p においては x より y を好んでいるとき，p において社会的選好が xPy ならば p' において $zP'w$ でなければならない[*6]。

以前に見た中立性は『各個人の p における x と y に関する選好と p' における z と w に関する選好が一致すれば，社会的選好も同じように一致する』という意味であったが，上記の条件では p において x より y を好む人や x と y について無差別である人が p' において w より z を好む場合を含んでいる。一方 p において y より x を好む人や x と y について無差別である人が p' において z より w を好むことはないと仮定している。したがってすべての人々の選好において p に

[*5] 本節は J. H. Blau and R. Deb, “Social decision functions and the veto”, *Econometrica*, vol. 45, pp. 871-880, 1977. にもとづく。
[*6] Blau and Deb ではこの条件は「*independence, neutrality and monotonicity*」と呼ばれている。

おける x の y に対する相対的な関係と比べて p' における z の w に対する相対的な関係が弱くはならない。中立性が意味する状況も含んでいるのでより強い条件になっている。中立性は無関係選択肢からの独立性を意味するので，この強い中立性も無関係選択肢からの独立性を意味する。この条件は中立性の条件に「正の反応性」（「諸相」参照）の精神を少し加えた形になっている。

パレート原理は仮定しないが，強い中立性は次のような無差別関係に関するパレート原理に似た性質を意味する。

補題 2.1. 強い中立性が成り立つとき，任意の選択肢の組 x，y について，すべての人々が x と y について無差別であれば，社会的選好においても無差別である。またすべての人々が x と y について無差別であるかまたは y より x を好むならば，社会的選好においても x と y が無差別であるかまたは y より x が好まれる。

証明. (1). あるプロフィール p においてすべての人々が xI_iy という選好を持っていて社会的に xPy であるとすると，x と y を入れ替えた別のプロフィール p' において yI'_ix であり，他の選択肢に関する選好に変化がないならば強い中立性によって $yP'x$ でなければならない。しかし xI_iy と yI'_ix とは同じ選好であるから矛盾であり，xIy でなければならない（yPx と仮定しても同じことが言える）。

(2). あるプロフィール p においてすべての人々が xI_iy という選好を持っていて，別のプロフィール p' においてすべての人々が xR'_iy という選好を持っているものとする。p' において yP'_ix という選好を持つ人はいないが p において yP_ix という選好を持つ人もいない。また p において xP_iy という選好を持つ人はいない。もし p' において社会的選好が $yP'x$ であれば強い中立性によって p においても yPx でなければならない。それはこの補題の (1) と矛盾する。したがって p' において $xR'y$ でなければならない。

☺

このように I と R についてはパレート原理に似た性質が得られるが，肝心の P（厳密な選好）については必ずしもパレート原理が成り立つとは言えない。すなわち，すべての人々が xP_iy という選好を持っているときに社会的選好が xIy となることがあり得る（この補題の (2) によって yPx とはならない）。しかし以下の議論にパレート原理は必要としない。

以上の準備をもとに次の定理を証明する。なお拒否権者とは「任意の選択肢の組についてある個人 i が xP_iy という選好を持つときに社会的選好が yPx とはならない」ような個人のことである。また非循環性は「任意の選択肢の組 x_1，$x_2,\cdots,x_m$ について社会的選好が x_1Px_2, $x_2Px_3,\cdots,x_{m-1}Px_m$ ならば x_1Rx_m である（x_mPx_1 とはならない）」という意味であった。

定理 2.1. 二項的社会選択ルールが「強い中立性」「定義域の非限定性」と「非循環性」を満たし，選択肢の数（k で表す）が個人の数（n で表す）よりも少なくないとき拒否権者が存在する。

証明. 拒否権者がいないと仮定する。まず個人 1 が拒否権者でないとすると，ある選択肢の組 x_1, x_n について（個人にも選択肢にも適当に番号をつける），あるプロフィール p において 1 が $x_1P_1x_n$ という選好を持っているときに社会的選好が x_nPx_1 となるような場合がある。強い中立

性により 1 以外のすべての人々の選好が $x_nP_ix_1$ となってもやはり社会的選好は x_nPx_1 である。そのとき再び強い中立性によって x_1, x_n 以外の選択肢の組についても同様のことが成り立つ。誰も拒否権者ではないので n 人すべての人について同じことが言える。そこで次のようなプロフィールを考えてみよう。

$$\text{個人 } 1：x_1P_1x_2,\ x_2P_1x_3,\ \cdots, x_{n-1}P_1x_n$$

$$\text{個人 } 2：x_2P_2x_3,\ x_3P_2x_4,\ \cdots, x_nP_2x_1$$

$$\cdots$$

$$\text{個人 } n：x_nP_nx_1,\ x_1P_nx_2,\ \cdots, x_{n-2}P_nx_{n-1}$$

上で述べた事柄により，このプロフィールにおいて社会的選好は x_nPx_1, x_1Px_2, $\cdots$, $x_{n-1}Px_n$ となるが，これは非循環性に反する。

以上によって拒否権者が存在しなければならない。 ☺

この定理においては特に証明の前半で個人 1 以外の人々が個人 1 とは逆の選好を持っている場合に社会的選好が x_nPx_1 となることを導くところで強い中立性が重要な役割を果たしている。

人々の選好が無差別な関係を含まない厳密な選好の場合には次の結果が得られる。

定理 2.2. 個人の選好に無差別な関係が含まれない場合，二項的社会選択ルールが「強い中立性」「定義域の非限定性」を満たし，選択肢の数（k で表す）が個人の数（n で表す）よりも少なくないならば，拒否権者が存在するとき，またそのときにのみ「非循環性」が成り立つ。

証明. (1). 定理 2.1 で用いたプロフィールには無差別な関係が含まれていないので「非循環性」が成り立つときには拒否権者が存在することが言える。

(2). 個人 i が拒否権者であって，なおかつ社会的選好が $xPyPzPx$ となる（非循環性が成り立たない）ような場合があると仮定する。そのとき i は拒否権者であり無差別な選好を持たないので，xP_iy，yP_iz，zP_ix という選好を持っていなければならない。しかしこれは個人の選好が推移性を満たすという仮定に反する。

☺

再び個人の選好が無差別な関係を含む場合に戻ろう。定理 2.1 からの展開として次の定理を証明する。

定理 2.3. 二項的社会選択ルールが「強い中立性」「定義域の非限定性」と「非循環性」を満たし，選択肢の数（k で表す）が個人の数（n で表す）よりも少なくないとき，拒否権者グループの階層的な列 (veto hierarchy)，V_1, V_2,$\cdots$, $V_t(V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_t = N)$ が存在する（N は n 人の集合)。拒否権者グループの階層的な列とは，まず V_1 に含まれる人々（1 人 1 人）が拒否権者であり，次にその人々がすべての選択肢について無差別ならば V_2 に含まれる人々（1 人 1 人）が拒否権者であり，さらに $V_1 \cup V_2$ の人々がすべての選択肢について無差別ならば V_3 に含まれる人々（1 人 1 人）が拒否権者であり，$\cdots$，と V_t まで続くようになっていることを意味する。

証明. まず定理 2.1 によって拒否権が存在する。1 人とは限らないのでそのグループを V_1 とする。もとの二項的社会選択ルールを F として，それをもとに新たな二項的社会選択ルール F_1 を次のようにして作る。$N-V_1$ の人々のある選好のプロフィールを p_1 とし，これに V_1 に含まれる人々がすべての選択肢について無差別であるという仮定を加えて全員の集合 N のプロフィール p とする。そして $F_1(p_1)=F(p)$ として F_1 を定義する。F_1 は F の性質（「強い中立性」と「非循環性」）を引き継いでいるので定理 2.1 によって F_1 には拒否権者が存在する（拒否権者がいないと仮定して定理 2.1 と同じように証明できる）。

> まず V_1 に含まれないある個人 2 が拒否権者でないとすると，ある選択肢の組 x_2, x_l について（個人にも選択肢にも適当に番号をつける），あるプロフィール p において 2 が $x_2P_ix_l$ という選好を持っているときに社会的選好が x_lPx_2 となるような場合がある。強い中立性により，このとき V_1 に含まれない 2 以外のすべての人々の選好が $x_lP_ix_2$ となってもやはり社会的選好は x_lPx_2 である。そのとき再び強い中立性によって x_2, x_l 以外の選択肢の組についても同様のことが成り立つ。誰も拒否権者ではないので V_1 に含まれない人々すべてについて同じことが言える。そこで V_1 に含まれない人々を個人 2, 3, 4, $\cdots$, l として次のようなプロフィールを考えてみる。
>
> $$\text{個人 2：} x_2P_2x_3,\ x_3P_2x_4,\ \cdots, x_{l-1}P_2x_l$$
>
> $$\text{個人 3：} x_3P_3x_4,\ x_4P_3x_5,\ \cdots, x_lP_3x_2$$
>
> $$\cdots$$
>
> $$\text{個人 } l\text{：} x_lP_lx_2,\ x_2P_lx_3,\ \cdots, x_{l-2}P_lx_{l-1}$$
>
> 上で述べた事柄により，このプロフィールにおいて社会的選好は x_lPx_2, x_2Px_3, $\cdots, x_{l-1}Px_l$ となるが，これは非循環性に反する。

F_1 の拒否権者のグループを V_2 として，同じように F_2 を作る。以下同様である。
N は有限であるから全体を V_1, $V_2,\cdots$, V_t に分けることができる。 ☺

この定理の逆を示す。

定理 2.4. 二項的社会選択ルールが「強い中立性」と「定義域の非限定性」を満たし，拒否権者グループの階層的な列 (veto hierarchy) が存在するならば「非循環性」が成り立つ。

証明.「非循環性」が成り立たないとするとあるプロフィールにおいて社会的選好が $x_1Px_2P\cdots Px_mPx_1$ となるような選択肢の組 x_1, $x_2,\cdots,x_m$ がある。そのとき V_1 に含まれる人々は拒否権者であるから $x_1R_ix_2R_i\cdots R_ix_mR_ix_1$ という選好を持たなければならないが，個人の選好は推移性を満たすので $x_1I_ix_2I_i\cdots I_ix_m$ でなければならない。すなわち V_1 の人々はそれらの選択肢のすべてについて無差別である。そうすると V_2 に含まれる人々がこれらの選択肢の組について拒否権者となるが，そのとき同じ議論によってそれらの人々はそれらの選択肢のすべてについて無差別でなければならない。同様の論理ですべての人々がこれらの選択肢について無差別で

ある。したがって補題 2.1 によって社会の選好もこれらの選択肢について無差別でなければならず非循環性に反するという仮定と矛盾する。 ☺

3 非循環性，強い中立性とグループ拒否権 (Kelsey(*Social Choice and Welfare*, 1985))

前節では選択肢の数が個人の数よりも少なくないときに 1 人 1 人が拒否権者であるようなグループが存在するという問題を扱ったが，この節では選択肢の数が個人の数より少ないときでもグループとして拒否権を持つ可能性があるという問題を考えてみよう*7。グループとして拒否権を持つとは，任意の選択肢の組 x, y についてあるグループに含まれるすべての人々が y より x を好むときに社会的選好が yPx とはならないという意味である。寡頭制 (oligarchy) に似ているが，寡頭制の場合は社会的選好が xPy となることを求めるので，それよりは意味が弱い。

まず定理 2.1 を個人ではなくグループとして拒否権を持つ場合を含めて証明する。

定理 3.1. まず n 人の人々を適当に t 個のグループに分け（t は n 以下の正の整数），それらを $G_1, G_2, \cdots, G_t$ と表す。各グループの人数に制限はない。二項的社会選択ルールが「強い中立性」「定義域の非限定性」と「非循環性」を満たし，選択肢の数（k で表す）が t 以上であるならば拒否権を持つグループが存在する。

証明. 拒否権を持つグループがないと仮定して矛盾を導く。まず G_1 が拒否権を持たないとする。ある選択肢の組 x_1, x_t について（選択肢に適当に番号をつける），あるプロフィール p において G_1 に含まれるすべての人々が $x_1P_ix_t$ という選好を持っているときに社会的選好が x_tPx_1 となるような場合がある。強い中立性により，このとき G_1 の人々以外のすべての人々の選好が $x_tP_ix_1$ となってもやはり社会的選好は x_tPx_1 である。そのとき再び強い中立性によって x_1, x_t 以外の選択肢の組についても同様のことが成り立つ。拒否権を持つグループはないので t 個のすべてのグループについて同じことが言える。そこで次のようなプロフィールを考えてみる。

$$G_1\text{の人々}：x_1P_1x_2,\ x_2P_1x_3,\ \cdots, x_{t-1}P_1x_t$$

$$G_2\text{の人々}：x_2P_2x_3,\ x_3P_2x_4,\ \cdots, x_tP_2x_1$$

$$\cdots$$

$$G_t\text{の人々}：x_tP_tx_1,\ x_1P_tx_2,\ \cdots, x_{t-2}P_tx_{t-1}$$

上で述べた事柄により，このプロフィールにおいて社会的選好は $x_tPx_1, x_1Px_2, \cdots, x_{n-1}Px_t$ となるが，これは非循環性に反する。 ☺

グループの分け方は任意であり，グループの数 t が選択肢の数を越えなければよい。様々な大きさのグループに分けることもできるし，同じような大きさのグループに分けることもできる。

---

*7 本節は D. Kelsey, “Acyclic choice and group veto”, *Social Choice and Welfare*, vol. 2, pp. 131-137, 1985. にもとづく。

この定理は少なくとも 1 つ拒否権を持つグループが存在することを主張するものであるが大きいグループが拒否権を持つか，それとも小さいグループが拒否権を持つかはわからない。そこで同じような大きさのグループに分けた方が小さいグループが拒否権を持つようにできることになる。このことを示すのが次の定理である。

定理 3.2. 二項的社会選択ルールが定理 3.1 の仮定を満たすとする。そのとき $v \geqq \frac{n}{k}$ を満たす任意の v について，v を越えない大きさのグループが拒否権を持つ（n は全体の人数，k は選択肢の数)。

証明. q，r を負でない整数として

$$n = qv + r\ (0 \leqq r < v)$$

と表すことができる。定理 3.1 で定義された各グループ G_i を $G_i = \{(i-1)v+1, (i-1)v+2, \cdots, iv\}(1 \leqq i \leqq q)$ のようにして作る。例えば G_1 は個人 1, 2, $\cdots$, v の v 人の人々を含み，G_2 は個人 $v+1$，$v+2$, $\cdots$, $2v$ までの v 人を含む。他も同様に v 人づつの人々からなる。ここで $r=0$ であれば n 人全員が G_1 から G_q までのグループに分けられ，$v \geqq \frac{n}{k}$ により $k \geqq \frac{n}{v} = q$ である。すると定理 3.1 によって少なくとも 1 つのグループが拒否権を持つ。

$r=0$ でないときには q 個のグループに分けた上で残った r 人で 1 つのグループ G_{q+1} を作る。$k \geqq \frac{n}{v}$ であり，かつ k は整数であるからこの場合にも $k \geqq q+1$ が成り立つ。したがってやはり定理 3.1 によって G_1 から G_{q+1} までのグループの内少なくとも 1 つのグループが拒否権を持つ。

いずれの場合も拒否権を持つグループの大きさは v を越えない。 ☺

この定理ではほぼ均等にグループ分けをすることを考えたが，次の定理で大きさの異なるグループを作ったときの小さいグループと大きいグループの関係について検討する。

定理 3.3. 二項的社会選択ルールが定理 3.1 の仮定を満たすとする。s 以下の大きさ（グループに含まれる人数）のグループが拒否権を持たないならば，グループの数を t として $n-(t-1)s$ 以上の大きさを持つすべてのグループが拒否権を持つ。

証明. 人数が n であるから s は $\frac{n}{t}$ より小さくなければならない[*8]。

G_1 が $n-(t-1)s$ 人のグループであるとすると G_1 以外の人々の数は $(t-1)s$ なので $t-1$ 個の s 人のグループに分けることができる。定理 3.1 によっていずれかのグループが拒否権を持つが，s 人以下のグループが拒否権を持たないとすれば G_1 が拒否権を持たなければならない。このようなグループ分けをどのように行っても（s 人以下のグループが拒否権を持たないという仮定のもとで）$n-(t-1)s$ 人のグループが必ず拒否権を持つ（どのようなメンバーであるかに関わらず)。なおこのとき $n-(t-1)s > s$ である。 ☺

s 以下のグループが拒否権を持たないとすると $s+1$ 以上のグループの中に拒否権を持つグループが存在する。すなわち $s+1$ はあるグループが「拒否権を持つ可能性がある」最小の値である。

[*8] 例えば $n=24$，$t=5$ とすると 5 人のグループを 4 つと 4 人のグループを 1 つ作れば全員を分けることができるので必ず 5 人以下のグループのいずれかが拒否権を持つ。したがってこの場合 s は 4 以下である。

一方 $n-(t-1)s$ 人以上のグループはそのすべてが拒否権を持つ。

最後に次の結果を示す。

定理 3.4. 二項的社会選択ルールが定理 3.1 の仮定を満たすとする。G が拒否権を持たないグループであるとすると，次の条件を満たすグループ G' のすべてが拒否権を持つ。

$$|G'|+|G\setminus G'|\geqq n-(t-2)s \tag{3.1}$$

n，t，s はこれまでと同じ意味であり，$|G'|$ は G' の大きさ（含まれる人々の人数）を表す。また $G\setminus G'$ は G に含まれる人々の内で G' に含まれない人々の集合を表しており，$|G\setminus G'|$ はその人数である[*9]。

証明. N を以下のようにして t 個のグループに分けよう。

(1). 上記の G'。
(2). 上記の $G\setminus G'$
(3). s 人以下の $t-2$ 個のグループ。

(3.1) より

$$|G'|+|G\setminus G'|+(t-2)s\geqq n$$

が成り立つのでこのような分け方は可能である。定理 3.1 によってこれらのグループの内少なくとも 1 つのグループが拒否権を持つ。しかし s 人以下のグループは拒否権を持たないとの仮定，および $G\setminus G'$ が G の部分集合であることによって G が拒否権を持たなければ $G\setminus G'$ も拒否権を持たないので，拒否権を持つのは G' である[*10]。 ☺

この定理は G と G' が共通のメンバーを含まないときには

$$|G'|\geqq n-(t-2)s-|G|$$

を満たす G' が常に拒否権を持つことを意味する。

4　社会的選択関数の戦略的操作不可能性とコンドルセ原理 (Campbell and Kelly(1998))

複数の選択肢を選ぶ可能性のある社会的選択関数の内で 2 つ以内の選択肢を選ぶものについて，その戦略的操作不可能性 (strategy-proofness) とコンドルセ原理 (Condorcet principle) と呼ばれる民主的な社会的選択ルールが満たすべき条件との関係を検討してみる[*11]。この節では人々

[*9] G と G' の双方が N を分ける 1 つのグループ分けに含まれていれば $G\setminus G'$ は空集合（誰もいない）であるが，ここではそのようには仮定していない。G は拒否権を持たない 1 つのグループであり，G' は適当なグループ分けをしたときに (3.1) を満たす 1 つのグループを指すから，G と G' が重複する可能性はある。

[*10] $G\setminus G'$ が拒否権を持つならばそのメンバーが y より x を好むときに社会的選好は yPx とはならない。同じことは G のメンバー全体についても言えるので G も拒否権を持つことになってしまう。

[*11] 本節は D. E. Campbell and J. Kelly, "Incompatibility of strategy-proofness and the Condorcet principle", *Social Choice and Welfare*, vol. 15, pp. 583-592 1998. にもとづく。

の選好は無差別な関係を含まない厳密なものであると仮定する。ここで扱う社会的選択関数について戦略的操作不可能性とコンドルセ原理を定義しなければならないが，その前に個々の選択肢に関する人々の選好をもとに 2 つ以内の選択肢からなる集合についての選好を考えなければならない。人々の選好のプロフィールを p，p' などで表し社会的選択関数を $f(p)$，$f(p')$ などと表すが，f は単一の選択肢とは限らず 2 つの選択肢からなる集合の場合もある。プロフィール p において個人 i が選択肢 y より x を好むとき xP_iy と表されるが，選択肢の集合 B と C に関する個人 i の選好 R_i を次のように定義する。

「すべての $x \in B$，$y \in C$ について $x = y$ か，さもなくば xP_iy であり（yP_ix となることはない）」
かつ
「（少なくとも 1 つづつの）$x \in B$，$y \in C$ について xP_iy である」
とき，またそのときにのみ BR_iC である。このとき個人 i は C より B を好むと言う。
プロフィール p'における同様の選好は R'_iで表す。他も同様である。

R_i という記号を使うがこれは選択肢の集合に関する厳密な選好を表す。

戦略的操作不可能性 (strategy-proofness)　上で定義した R_i にもとづいて戦略的操作不可能性を考える。プロフィール p，p' を個人 i の選好のみが異なる 2 つのプロフィール，$f(p)$，$f(p')$ を p，p' において選ばれる選択肢の集合としたとき，個人 i が p において $f(p)$ より $f(p')$ を好む（$f(p')R_if(p)$）か，または p' において $f(p')$ より $f(p)$ を好む（$f(p)R'_if(p')$）とき f は p または p' において個人 i によって操作可能 (manipulable) である。f が誰によっても，いかなるプロフィールにおいても操作可能でないとき戦略的に操作不可能 (strategy-proof) である。

コンドルセ原理 (Condorcet principle)　コンドルセ原理は多数決が有効に働くことを要求するものである。例えば選択肢 x と y について y より x を好む人の数が x より y を好む人の数よりも多ければ x と y についてはx が多数決によって選ばれ，もし同数であれば両方が選ばれる（人々の選好が厳密なものであれば人数が偶数でなければそのようなことは起こらない)。x が他のどの選択肢との比較においても多数決によって選ばれるかまたは少なくとも賛否同数になるとき x はコンドルセ勝者であると言う。2 つ以上のコンドルセ勝者が存在する場合もあるがそのときは必ずそれらは多数決において賛否同数となる。もしただ 1 つのコンドルセ勝者が存在するならばそれが，またそれのみが社会的選択関数によって選ばれることが民主的な社会的選択ルールにとっては望ましい条件となろう。コンドルセ原理はそのことを求めるものである。

以上の準備のもとに次の定理を証明する。

定理 4.1. 選択肢の数が 3 つ以上で，かつ人々の人数も 3 人以上であるとする。そのとき 2 つ以内の選択肢を選ぶ社会的選択関数がコンドルセ原理を満たすならば操作可能である（戦略的操作不可能性を満たさない)。

選択肢が 2 つしかない場合には常にコンドルセ勝者を選ぶような社会的選択関数が戦略的に操作不可能である。例えばある人が y より x を好んでいて，その選好を表明した結果多数決によって y または x と y が選ばれているとする。このとき真の選好とは異なる y を選ぶ選好を表明したとしても x が選ばれるように，あるいは x のみが選ばれるように変えることはできない。一方，2 人しかいないとすると，その 2 人がそれぞれ最も好む選択肢の両方を選ぶ（同じ選択肢を最も好むときにはそれのみを選ぶ）社会的選択関数はコンドルセ原理を満たし，かつ戦略的に操作不可能である。

証明. 社会的選択関数 f がコンドルセ原理と戦略的操作不可能性を満たすと仮定して矛盾を導く。プロフィール p，p' を次のようにとる。

(1). 任意の個人 j が p' において最も好む選択肢を p においては 2 番目に好み，p において最も好む選択肢を p' において 2 番目に好む。
(2). p' において j が最も好む選択肢は p' における唯一のコンドルセ勝者である。

このとき次のことが成り立つ。

Key principle　任意の個人 j が p において最も好む選択肢か，または 2 番目に好む選択肢のいずれか（あるいは両方）が $f(p)$ に含まれる。
もしそうでなければ（(2) の条件によって）j は p' における選好を表明することによって p において 2 番目に好む選択肢を実現することができる（その選択肢が p' における唯一のコンドルセ勝者であるから）。個人 j は p において f が選ぶどの選択肢よりもその選択肢を好むので f は操作可能となる。

その上でいくつかのケースに分けて考える。

(1). 人々の人数が奇数の場合。
x，y，z を 3 つの選択肢として次のようなプロフィールを p とする。

個人 1：$xyz\cdots$の順に好む，個人 2：$yzx\cdots$の順に好む，個人 3：$zxy\cdots$の順に好む

上記以外の偶数番目の人：$xyz\cdots$の順に好む，上記以外の奇数番目の人：$zyx\cdots$の順に好む

Key principle によって（個人 1 については）x または y が $f(p)$ に含まれる。同様に個人 2，3 について y または z，z または x が $f(p)$ に含まれる。したがって $f(p)$ は x，y，z の内の 2 つを含む集合である。まず $f(p)=\{x,y\}$ と仮定し，次のプロフィール p^* を考える（個人 3 の選好のみが p と異なる）。

個人 1：$xyz\cdots$の順に好む，個人 2：$yzx\cdots$の順に好む，個人 3：$xzy\cdots$の順に好む

上記以外の偶数番目の人：$xyz\cdots$の順に好む，上記以外の奇数番目の人：$zyx\cdots$の順に好む

そのとき x のみが多数決によって他のどの選択肢にも負けない（唯一のコンドルセ勝者である）のでコンドルセ原理によって $f(p^*)=\{x\}$ である。しかし個人 3 は p において $\{x,y\}$

よりも $\{x\}$ を好むので f は個人 3 によって操作可能となる。同様にして $f(p)=\{x,z\}$ のときには個人 2 が $zyx\cdots$ の順に好む選好を表明すれば f は z のみを選ぶから個人 2 によって操作可能であり，$f(p)=\{y,z\}$ のときには個人 1 が $yxz\cdots$ の順に好む選好を表明すれば f は y のみを選ぶから個人 1 によって操作可能である。

(2). 人々の人数が偶数で，選択肢の数が 4 つ以上の場合。
x，y，z，w を 4 つの選択肢として次のプロフィールを p とする。

個人 1：$xyzw\cdots$の順に好む，個人 2：$yzwx\cdots$の順に好む

個人 3：$zwxy\cdots$の順に好む，個人 4：$wxyz\cdots$の順に好む

上記以外の奇数番目の人：$xyzw\cdots$の順に好む, 上記以外の偶数番目の人：$wzyx\cdots$の順に好む

Key principle によって（個人 1 については）x または y が $f(p)$ に含まれる。同様に個人 2，3，4 について y または z，z または w，および w または x が $f(p)$ に含まれる。したがって f は x と z，または y と w を選ぶ。$f(p)=\{x,z\}$ であるとすると個人 4 は $xwyz\cdots$ の順に好むような選好を表明することによって（コンドルセ原理により）x のみが選ばれるようにすることができる（x のみが多数決において他のどれにも負けない)。p において個人 4 は $\{x,z\}$ よりも $\{x\}$ の方を好むので f は操作可能となる。したがって $f(p)=\{y,w\}$ でなければならないが，そのとき同様の論理によって個人 3 が $wzxy\cdots$ の順に好むような選好を表明することによって w のみが選ばれるように操作することが可能である。

(3). 人々の人数が偶数で，選択肢の数が 3 つの場合。3 つの選択肢を x，y，z とし，さらに 2 つのケースに分ける。

(i) 人々の人数が 6 人以上の場合。
次のプロフィールを p とする。

個人 1：$xyz\cdots$の順に好む，個人 2：$xyz\cdots$の順に好む，個人 3：$yzx\cdots$の順に好む

個人 4：$yzx\cdots$の順に好む，個人 5：$zxy\cdots$の順に好む，個人 6：$zxy\cdots$の順に好む

上記以外の奇数番目の人：$xyz\cdots$の順に好む, 上記以外の偶数番目の人：$zyx\cdots$の順に好む

Key principle によって $f(p)$ は x, y, z の内の 2 つを含む集合である。まず $f(p)=\{x,y\}$ と仮定し，個人 5 の選好のみが $xzy\cdots$ の順に好むものに変ったとすると（個人 6 でもよい)，x のみが多数決によって他のどの選択肢にも負けないのでコンドルセ原理によって x のみが選ばれる。しかしそのとき個人 5 は p において $\{x,y\}$ よりも $\{x\}$ を好むので f は個人 5 によって操作可能となる。同様にして $f(p)=\{x,z\}$ のときには個人 3 が $zyx\cdots$ の順に好む選好を表明すれば f は z のみを選ぶから個人 3 によって操作可能であり，$f(p)=\{y,z\}$ のときには個人 1 が $yxz\cdots$ の順に好む選好を表明すれば f は y のみを選ぶから個人 1 によって操作可能である。

(ii) 人々の人数が 4 人の場合。
まず次の事実を示す。

補題 4.1. 選択肢の数が 3 つで人々の人数が 4 人の場合には，ある選択肢に多数決で負ける選択肢は絶対に f によって選ばれない。

証明. まず多数決で負ける選択肢のみが f によって選ばれることはないということを示す。もし $f(p)=\{y\}$ で y がある選択肢 x に多数決で負けるようなプロフィール p があるとすると p において次のような選好になっていると仮定することができる

個人 1：xP_1y，個人 2：xP_2y，個人 3：xP_3y，個人 4：xP_4y または yP_4x（特定しない）

4 人中少なくとも 3 人が y より x を好まなければ y が x に多数決で負けることにはならない。このとき x か z のいずれかが唯一のコンドルセ勝者であればコンドルセ原理によって $f(p)\neq\{y\}$ であるから，z が x に多数決で負けることはないと考えなければならない。したがって個人 1，2，3 の内少なくとも 1 人の選好において z が x より上に位置する。もし z が x に多数決で勝つとすると少なくとも 2 人の選好において z が最上位に位置することになるが，そうすると z は y に多数決で負けないことになり唯一のコンドルセ勝者になる。したがって x と z は多数決において同数でなければならない。個人 1 が zP_1xP_1y という選好を持っていると仮定してみよう。そのとき個人 1 は xP_1zP_1y という選好を表明することによって x のみがコンドルセ勝者となるようにでき，かつ y よりも x を好むので f を操作することができる。
以上によって x に多数決で負ける y が選ばれるときには x，z のいずれかが同時に選ばれなければならない。そこで $f(p)=\{x,y\}$ と仮定してみよう。上と同じ論理によって x と z は多数決において同数である。やはり個人 1 の選好において z が最上位にあるものとすると，個人 1 は xP_1yP_1z という選好を表明することによって x のみがコンドルセ勝者となるようにでき，かつ $\{x,y\}$ よりも x を好むので f を操作することができる。したがって $f(p)=\{y,z\}$ でなければならない。もし y が z に多数決で負けるならば x と z を入れ替えて上の論理を用いて矛盾を導ける。したがって y と z は多数決において同数でなければならない。ここで個人 4 の選好についていくつかのケースに分けて考える。

i. 個人 4 の選好が zP_4yP_4x であるとき：
 y と z が多数決において同数であり，x と z も同数であるから個人 1，2，3 の内 2 人が xyz の順で好み，もう 1 人は zxy の順の選好を持っていなければならない。個人 1，2 が xyz，3 が zxy の順の選好を持っていると仮定し，次のようなプロフィール p^* を考える（xyz の順に好む選好を単に xyz と表す。他も同様。）。

 個人 1：xyz，個人 2：xyz，個人 3：zxy，個人 4：yzx

 このときコンドルセ原理によって $f(p^*)=\{x\}$ であり（x のみが多数決によって負けない），個人 4 は p^* において $\{x\}$ より $\{y,z\}$ を好むので f は個人 4 によって p^* において操作可能となる。

ii. 個人 4 の選好が yP_4zP_4x であるとき：

y と z が多数決において同数であり，x と z も同数であるから個人 1，2，3 の内 1 人が zxy という選好を，1 人が xyz，残る 1 人が xzy という選好を持っていなければならない。そこで p が次のようなプロフィールであるとする。

個人 1：zxy，個人 2：xyz，個人 3：xzy，個人 4：yzx

このとき $f(p)=\{y,z\}$ であった。ここで個人 3 の選好のみが変化してできる次のプロフィール p^* を考える。

個人 1：zxy，個人 2：xyz，個人 3：zxy，個人 4：yzx

z が唯一のコンドルセ勝者となるので $f(p^*)=\{z\}$ であるが，個人 3 は p において $\{y,z\}$ より $\{z\}$ を好むので f は p において個人 3 によって操作可能となる。

iii. 個人 4 の選好が yP_4xP_4z であるとき：
y と z が多数決において同数であり，x と z も同数であるから個人 1，2，3 の内 2 人が zxy という選好を持ち，残る 1 人が xyz という選好を持たなければならない。そこで p が次のようなプロフィールであるとする。

個人 1：zxy，個人 2：zxy，個人 3：xyz，個人 4：yxz

このとき $f(p)=\{y,z\}$ であった。ここで個人 4 の選好のみが変化してできる次のプロフィール p^* を考える。

個人 1：zxy，個人 2：zxy，個人 3：xyz，個人 4：yzx

z が唯一のコンドルセ勝者となるので $f(p^*)=\{z\}$ であるが，個人 4 は p^* において $\{z\}$ より $\{y,z\}$ を好むので f は p^* において個人 4 によって操作可能となる。

iv. 個人 4 が y より x を好むとき：
y と z が多数決において同数であり，x と z も同数であるから z は 2 人の選好において y より下に位置し（このとき x より下に位置する），同じく 2 人の選好において x より上に位置しなければならない（このとき y より上に位置する）。具体的に次のようなプロフィール p を考える。

個人 1：xyz，個人 2：xyz，個人 3：zxy，個人 4：zxy

このとき $f(p)=\{y,z\}$ であった。ここで個人 1 の選好のみが変化してできる次のプロフィール p^* を考える。

個人 1：yzx，個人 2：xyz，個人 3：zxy，個人 4：zxy

z が唯一のコンドルセ勝者となるので $f(p^*)=\{z\}$ であるが，個人 1 は p^* において $\{z\}$ より $\{y,z\}$ を好むので f は p^* において個人 1 によって操作可能となる。

以上によって多数決で他の選択肢に負ける選択肢が選ばれることはない。 ☺

この結果を用いて f がただ 1 つの選択肢を選ばなければならないことを示す。そうするとギバード・サタースウェイトの定理によってコンドルセ原理を満たす（したがって独裁的ではない）f は操作可能となる。

唯一のコンドルセ勝者が存在すればコンドルセ原理によってそれのみが f によって選ばれる。次に 2 つのコンドルセ勝者が存在すると仮定してみよう。なお補題 4.1 の証明からわかるように，このケース（選択肢が 3 つ，人数が 4 人）ではコンドルセ勝者が存在しないということはない[*12]。y が x か z に多数決で負け，x，z はいずれにも負けないと仮定する。したがって x と z は多数決において同数である。2 つのプロフィール p，p' があり $f(p)=\{x,z\}$ として p から p' へ向けて 1 人 1 人の選好が個人 1 から順に変化していくものとする。個人 1 の選好のみが変化してできるプロフィールを p_1，個人 1，2 の選好が変化してできるプロフィールを p_2，個人 1，2，3 の選好が変化してできるプロフィールを p_3 と表す。p' は p をもとに各個人の選好において y が最下位になるように変化したものとする。$f(p')\neq\{x,z\}$ と仮定する。y はどの p_i においても多数決で負ける選択肢であるから，補題 4.1 により $y\notin f(p_i)$ である。すると p から p' への変化において初めて $f(p_i)\neq\{x,z\}$ となる i が存在する。そのとき $f(p_i)=\{x\}$ または $f(p_i)=\{z\}$ である。p_i と p_{i-1} とで x と z に関する人々の選好は変っていない。したがって $\{x,z\}$ と $\{x\}$，または $\{z\}$ に関する選好にも変化がない。そうすると $f(p_i)=\{x\}$ であって，p_{i-1} において i が z より x を好んでいれば f は i によって p_{i-1} において操作可能であり，逆に p_{i-1} において i が x より z を好んでいれば f は i によって p_i において操作可能である。$f(p_i)=\{z\}$ の場合にも同様のことが言える。以上によって $f(p')=\{x,z\}$ でなければならない。

ここで p' が次のようなプロフィールであるとする。

$$\text{個人 1：}xzy,\ \text{個人 2：}zxy,\ \text{個人 3：}xzy,\ \text{個人 4：}zxy$$

また次のようなプロフィール p^* を考える。

$$\text{個人 1：}xyz,\ \text{個人 2：}zxy,\ \text{個人 3：}xzy,\ \text{個人 4：}zxy$$

やはり y は多数決で負ける選択肢であるので $f(p^*)$ は $\{x\}$ か $\{z\}$ または $\{x,z\}$ であるが，$\{x\}$ であるとすると個人 1 によって p' において操作可能，$\{z\}$ ならば p^* において操作可能となるので $f(p^*)=\{x,z\}$ である。さらに次のプロフィール p^{**} を考える。

$$\text{個人 1：}xyz,\ \text{個人 2：}zxy,\ \text{個人 3：}xyz,\ \text{個人 4：}zxy$$

個人 3 の選好だけが p^* と異なる。やはり y は多数決で負ける（x に負ける）選択肢であるので $f(p^{**})$ は $\{x\}$ か $\{z\}$ または $\{x,z\}$ であるが，$\{x\}$ であるとすると個人 3 によって p^* において操作可能，$\{z\}$ ならば p^{**} において操作可能となるので $f(p^{**})=\{x,z\}$

[*12] それ以外のケースではコンドルセ勝者が存在しないということがあり得る。その場合はコンドルセ勝者でない選択肢が選ばれる。

である。さらに次のプロフィール p^+ を考える。

$$\text{個人 }1：xyz,\ \text{個人 }2：yzx,\ \text{個人 }3：xyz,\ \text{個人 }4：zxy$$

このとき y は z に多数決で勝ち，x が y に多数決で勝つので $f(p^+) = \{x\}$ である。しかし個人 2 は p^+ において $\{x\}$ より $\{x,z\}$ を好むので f は p^+ において個人 2 によって操作可能となる。以上の議論によってそもそも p において f はただ 1 つの選択肢のみを選んでいなければならない。

最後に 3 つの選択肢すべてがコンドルセ勝者であるときも f はただ 1 つの選択肢を選ぶことを示す。プロフィール p においてある選択肢，例えば x が 2 人の選好において最上位にあるとする（人数が 4 人であるから）。そのときその x は残る 2 人の選好の最下位になければならない。そうでないと x はどれかの選択肢に多数決で勝ってしまう。また y と z は多数決において同数である。2 つのケースに分けて議論を進める。

i. 4 人が次のような選好を持つ場合：

$$\text{個人 }1：xyz,\ \text{個人 }2：xyz,\ \text{個人 }3：zyx,\ \text{個人 }4：zyx$$

これは x が選好の最上位にある 2 人がともに z より y を好む場合である。このとき x が選好の最下位にある 2 人の y と z に関する選好も同一である。後者の 2 人の選好が異なっている場合は次のようなプロフィールになる。

$$\text{個人 }1：xyz,\ \text{個人 }2：xyz,\ \text{個人 }3：zyx,\ \text{個人 }4：yzx$$

このとき z が y に多数決で負けることになるので仮定に合わない。

さらにこのケースをいくつかに分ける。

A. $f(p) = \{x,y\}$ の場合：

p をもとに次のプロフィール p^* を作る。

$$\text{個人 }1：xyz,\ \text{個人 }2：xyz,\ \text{個人 }3：yzx,\ \text{個人 }4：zyx$$

p^* においては y が z に多数決で勝つので $f(p^*)$ は $\{x\}$，$\{y\}$，$\{x,y\}$ のいずれかである。しかし上の議論によって $f(p^*)$ は $\{x\}$ か $\{y\}$ でなければならない。$f(p^*) = \{x\}$ ならば f は個人 3 によって p^* において操作可能であり，$f(p^*) = \{y\}$ ならば個人 3 によって p において操作可能である。

B. $f(p) = \{x,z\}$ の場合：

p をもとに次のプロフィール p^* を作る。

$$\text{個人 }1：xyz,\ \text{個人 }2：xzy,\ \text{個人 }3：zyx,\ \text{個人 }4：zyx$$

p^* においては z が y に多数決で勝つので $f(p^*)$ は $\{x\}$，$\{z\}$，$\{x,z\}$ のいずれかである。しかし上の議論によって $f(p^*)$ は $\{x\}$ か $\{z\}$ でなければならない。$f(p^*) = \{x\}$ ならば f は個人 2 によって p において操作可能であり，$f(p^*) = \{z\}$ ならば個人 2 によって p^* において操作可能である。

C. $f(p)=\{y,z\}$ の場合：

p をもとに次のプロフィール p^* を作る。

個人 1：yxz，個人 2：xyz，個人 3：zyx，個人 4：zyx

p^* においては y が x に多数決で勝つので $f(p^*)$ は $\{y\}$，$\{z\}$，$\{y,z\}$ のいずれかである。しかし上の議論によって $f(p^*)$ は $\{y\}$ か $\{z\}$ でなければならない。$f(p^*)=\{y\}$ ならば f は個人 1 によって p において操作可能であり，$f(p^*)=\{z\}$ ならば個人 1 によって p^* において操作可能である。

ii. 4 人が次のような選好を持つ場合：

個人 1：xyz，個人 2：xzy，個人 3：yzx，個人 4：zyx

これは x が選好の最上位にある 2 人の内 1 人が z より y を好み，1 人が y より z を好む場合である。このとき x が選好の最下位にある 2 人についても同様にその内 1 人が z より y を好み，1 人が y より z を好む。後者の 2 人の選好が同一である場合には次のようなプロフィールになる。

個人 1：xyz，個人 2：xzy，個人 3：yzx，個人 4：yzx

このとき z が y に多数決で負けることになるので仮定に合わない。前者の 2 人の選好が同一である場合には次のようなプロフィールになる。

個人 1：xzy，個人 2：xzy，個人 3：yzx，個人 4：zyx

このとき y が z に多数決で負けることになるので仮定に合わない。

さらにこのケースをいくつかに分ける。

A. $f(p)=\{x,y\}$ の場合：

p をもとに次のプロフィール p^* を作る。

個人 1：xyz，個人 2：xyz，個人 3：yzx，個人 4：zyx

p^* においては y が z に多数決で勝つので $f(p^*)$ は $\{x\}$，$\{y\}$，$\{x,y\}$ のいずれかである。しかし上の議論によって $f(p^*)$ は $\{x\}$ か $\{y\}$ でなければならない。$f(p^*)=\{x\}$ ならば f は個人 2 によって p において操作可能であり，$f(p^*)=\{y\}$ ならば個人 2 によって p^* において操作可能である。

B. $f(p)=\{x,z\}$ の場合：

p をもとに次のプロフィール p^* を作る。

個人 1：xzy，個人 2：xzy，個人 3：yzx，個人 4：zyx

p^* においては z が y に多数決で勝つので $f(p^*)$ は $\{x\}$，$\{z\}$，$\{x,z\}$ のいずれかである。しかし上の議論によって $f(p^*)$ は $\{x\}$ か $\{z\}$ でなければならない。$f(p^*)=\{x\}$ ならば f は個人 1 によって p において操作可能であり，$f(p^*)=\{z\}$ ならば個人 1 によって p^* において操作可能である。

C. $f(p)=\{y,z\}$ の場合：
p をもとに次のプロフィール p^* を作る。

個人 1：xyz，個人 2：zxy，個人 3：yzx，個人 4：zyx

p^* においては z が x に多数決で勝つので $f(p^*)$ は $\{y\}$，$\{z\}$，$\{y,z\}$ のいずれかである。しかし上の議論によって $f(p^*)$ は $\{y\}$ か $\{z\}$ でなければならない。$f(p^*)=\{y\}$ ならば f は個人 2 によって p^* において操作可能であり，$f(p^*)=\{z\}$ ならば個人 2 によって p において操作可能である。

☺

以上で証明が終わった。

5　人々の選好が連続である場合の社会的選択関数について (Barbera and Peleg(1990))

この節ではギバード・サタースウェイトの定理の意味する内容について，選択肢の集合が距離空間のコンパクトな部分集合であり，その選択肢に関する人々の選好が連続な効用関数で表されるという設定のもとで検討する[*13]。距離空間とは距離が定義された空間ということであるが，通常のユークリッド空間とその距離（通常の 2 点間の距離）を考えればよい。人々の人数は $n(n \geqq 2)$ 人であるとする。

選択肢の集合を A とし A に対して定義された距離を d とする。人々の選好は連続な効用関数で表され，個人 i の選好を表現する効用関数を u_i と書くがプロフィールはやはり p で表すことにする。またプロフィールの集合を $\mathscr{P}$ と書く。他のプロフィール，例えば p' における i の効用関数は u'_i と書かれる。選好を表すときには R_i，R'_i などと書く。社会的選択関数 f によって選ばれる選択肢の範囲を A_f とする。個人 i が f の独裁者であるというのは，あらゆるプロフィール p において，すべての $x \in A_f$ について $f(p)R_ix$ であるということである。また f がある個人 i によってプロフィール p において操作可能 (manipulable) であるというのは，p においてある個人 i の選好だけが R_i から R'_i に変化してできたプロフィール p' と p において $f(p')P_if(p)$ が成り立つことであり，いかなるプロフィールにおいても誰にとっても操作可能でないとき f は戦略的に操作不可能 (strategy-proof) である。以下ではいくつかの補題を経て次の定理を証明する。

定理 5.1. 人々の選好が連続な場合にも，戦略的に操作不可能な社会的選択関数が選ぶ選択肢の数が 3 つ以上であれば独裁者が存在する。

準備となる補題を証明する前にいくつか定義が必要である。プロフィールの集合 $\mathscr{P}$ の内，すべての人々が最も好む選択肢がそれぞれ A_f に含まれるただ 1 つの選択肢であるようなプロフィー

*13 本節は S. Barbera and B. Peleg, “Strategy-proof voting schemes with continuous preferences”, *Social Choice and Welfare*, vol. 7, pp. 31-38, 1990. にもとづく

ルの集合を $S\mathscr{P}$ とする。また $S\mathscr{P}$ に限定した f を f^* とし，この f^* が独裁者を持てば f も独裁者を持つことを示す。

$x \in A_f$ として $T_x = \{R_i |$ すべての $y \in A_f,\ y \neq x$ について $xP_iy\}$ と定義する。T_x は A_f の中で x を厳密に最も好むような選好の集合を表している。次に $T = \{R_i |$ ある $x \in A_f$ について $R_i \in T_x\}$ とする。$S\mathscr{P}$ は A_f に含まれる選択肢の内のいずれか 1 つを厳密に最も好むような選好の集合であるから，上記の $S\mathscr{P}$ はこの T の n 人分の積集合 T^n に等しい。さらに $f^* = f|_{S\mathscr{P}}$ と定義する。f が戦略的に操作不可能であれば f^* も戦略的に操作不可能である[*14]。まず次の補題を示す。

補題 5.1. f が戦略的に操作不可能であり，あるプロフィール p においてすべての人々について $R_i \in T_x$ であれば $f(p) = x$ である。

証明. あるプロフィール p' において $f(p') = x$ であるとする（$x \in A_f$ なのでそのようなプロフィールがある）。p' における人々の選好を R'_i で表す（以下同様）。もし $f(p) \neq x$ であれば p' から p へ向けて個人 1 から始めて 1 人 1 人選好が変化する過程において誰かの選好の変化によって f が選ぶ選択肢が x ではなくなるときがある。その誰かを個人 j とする。そのとき，j は x を厳密に最も好むから f は j によって操作可能である。 ☺

この補題の意味するところはすべての人々がある共通の選択肢を厳密に最も好むときにはそれが f によって選ばれるということである。

全員の選好が T_x に含まれるプロフィールは $S\mathscr{P}$ に含まれるプロフィールであり，そのようなプロフィールにおいては f^* が定義される。A_f に含まれるあらゆる x について，すべての人々が x を厳密に最も好むようなプロフィールを考えれば f したがって f^* は x を選ぶ。よって f が選ぶ選択肢の集合と f^* が選ぶ選択肢の集合とは一致する（$A_f = A_{f^*}$）。

次に MSPAP という言葉を定義する。

MSPAP(modified strong positive association)　f が次の性質を持つとき MSPAP を満たすと言う。

> 任意のプロフィールを p，その p において 1 人 (個人 i) の選好だけが変化したプロフィールを p'，$x \in A_f$ とする。$f(p) = x$ ですべての $y \in A_f,\ y \neq x$ について「xR_iy のときに xP'_iy」ならば $f(p') = x$ である。

これは p において x が選ばれており，個人 i が p において x より好まない選択肢（それらより x を好むかまたは無差別である）について，p' においてはそれらより x を厳密に好むとき p' においても x が選ばれるという条件である。

この MSPAP について次の補題を示す。

補題 5.2. f が戦略的に操作不可能であれば MSPAP を満たす。

[*14] f^* が操作可能であるとすれば $S\mathscr{P}$ に含まれるあるプロフィールにおいて，ある人がそのプロフィールにおける選好とは異なる選好（$S\mathscr{P}$ に含まれるプロフィールにおける選好）を表明することによってより大きな効用が実現できることになるが，それは f そのものがそのプロフィールにおいて操作可能であることを意味する。

証明. あるプロフィール p において $f(p)=x$ であるとし，次のようなプロフィール p' を考える。

$$\text{ある個人 } i\text{，すべての } y\in A_f,\ y\neq x \text{ について } xR_iy \text{ ならば } xP'_iy\text{，他の人々の選好は } p \text{ と同じ}$$

MSPAP が成り立たないとすると，ある $z\neq x$ について $f(p')=z$ となる。もし zR'_ix ならば仮定より zP_ix でなければならないが（xR_iz ならば xP'_iz であるから），そうすると f は個人 i によって p において操作可能である。逆に xP'_iz ならば f は個人 i によって p' において操作可能である。したがって MSPAP が成り立たなければならない。 ☺

補題 5.3 (パレート原理). $x,\ y\in A_f$ とし，任意のプロフィール p においてすべての人々が y より x を好むならば f は y を選ばない（$f(p)\neq y$）。

証明. $f(p)=y$ であると仮定してみる。次のようなプロフィール p' を考える。

$$\text{すべての人々について } R'_i\in T_x\text{，かつ } yR_iz(z\neq y) \text{ ならば } yP'_iz$$

そのとき MSPAP によって $f(p')=y$ であるが，補題 5.1 によって $f(p')=x$ でなければならないので矛盾が生じる。したがって $f(p)\neq y$ である。 ☺

補題 5.4. A_f は閉集合である。

証明. x が A_f の閉包（A_f を含むすべての閉集合の共通部分，あるいは A_f を含む最も小さい閉集合）に含まれる選択肢であるとする。あるプロフィール p においてすべての人々（i で表す）の（選好を表現する）効用関数 u_i を $u_i=-d(x,y)$ と定義する。$y\in A$ であり，$d(x,y)$ は x と y との距離である。$y\neq x$ であれば（A が距離空間であり，A_f もその部分空間として同じ d を距離とする距離空間であるから）ある $x'\in A_f$ について $d(x,x')<d(x,y)$ である。そのとき u_i の定義からすべての人々について $x'P_iy$ となり，補題 5.3 から $f(p)\neq y$ である。したがって $f(p)=x$ でなければならず A_f の閉包は A_f に含まれるからこれらは一致し A_f は閉集合である[*15]。 ☺

補題 5.5. f^* が独裁者を持てば f も独裁者を持つ。

証明. i が f^* の独裁者であるとする。この i が f の独裁者でもあることを示す。あるプロフィール p において $f(p)=x$ であるとする。もし i が f の独裁者でなければ，ある $y\in A_f$ について yP_ix となるような場合がある。別のプロフィール p' をとり i 以外の人々（j で表す）の選好 P'_j が T_x に含まれ，i の選好が T_y に含まれるとする。さらに個人 i の選好について

$$\text{すべての } z\in A_f,\ z\neq x \text{ について } xR_iz \text{ ならば } xP'_iz$$

が成り立つと仮定する。i が f^* の独裁者であることから $f(p')=y$ であるが（$A_f=A_{f^*}$ であるから $y\in A_{f^*}$ である），一方 MSPAP によって $f(p')=x$ でなければならない。これは矛盾であるから i は f の独裁者でもある。 ☺

---

*15 A_f が有限個の選択肢しか含まなければそれは閉集合である。閉集合でないとすれば無限個の選択肢（点）を含み，かつ A のある点 x^* へ収束する A_f の無限個の点列で x^* が A_f に含まれないものがある。上の証明の x がこの x^* に当たり，x が A_f に含まれることが示されている。

これで f^* についてだけ考えればよくなった。以下では人々の選好を $S\mathscr{P}$ に含まれるプロフィールに限定して，さらにいくつかの補題を証明して行く。まず個人 i 以外の人々の選択集合 (option set) $O_{-i}(R_i)$ を次のように定義する。

$$O_{-i}(R_i) = \{x| \text{ある } R_{-i} \text{について } x = f(R_i, R_{-i})\}$$

R_{-i} は個人 i 以外の人々の選好の組を表すので (R_i, R_{-i}) で 1 つのプロフィールになる。$O_{-i}(R_i)$ は個人 i の選好が R_i に固定されているときに，それ以外の人々の選好を適当に変える（ある 1 つの選択肢を厳密に好む選好の内で）ことによって実現できる選択肢の集合を表している。ここで $f(R_i, R_{-i})$ は個人 i の選好が特定の選好に固定されているという前提でのそれ以外の人々にとっての社会的選択関数であり，f が戦略的に操作不可能ならば $f(R_i, R_{-i})$ も i 以外の人々にとって戦略的に操作不可能である[*16]。

以下の補題を示す。

補題 5.6. すべての R_i について $O_{-i}(R_i)$ は閉集合である。

証明. $f(R_i, R_{-i})$ は戦略的に操作不可能であり，$O_{-i}(R_i)$ はそのような社会的選択関数によって選ばれる選択肢の集合であるから，補題 5.4 と同様にして閉集合であることが示される。 ☺

ここで $x \in A$ と実数 $\delta > 0$ について

$$B(x, \delta) = \{y \in A | d(x, y) < \delta\}$$

を定義する。これは x からの距離が δ より小さい選択肢の集合である（数学では近傍と呼ばれる）。

補題 5.7. 個人 i 以外の人々の選好がすべて等しい（R_j で表す）ようなプロフィール p において f は $O_{-i}(R_i)$ の中で選好 R_j のもとで最も好まれる選択肢（個人 i 以外の人々が最も好む選択肢）を選ぶ。

証明. $f(R_i, R_{-i})$ は i 以外の人々にとっての社会的選択関数であり，戦略的に操作不可能であるから補題 5.3 によって個人 i 以外の人々が最も好む選択肢以外の選択肢を選ばない。 ☺

補題 5.8. $x \in A_f$，R'_i と R''_i が T_x に含まれる個人 i の 2 つの選好であるとする。そのとき $O_{-i}(R'_i) = O_{-i}(R''_i)$ である。

証明. $O_{-i}(R'_i) \neq O_{-i}(R''_i)$ ならば $z \in O_{-i}(R''_i) \setminus O_{-i}(R'_i)$（または $z \in O_{-i}(R'_i) \setminus O_{-i}(R''_i)$，どちらでも同じこと）となるような z がある。補題 5.1 により $x \in O_{-i}(R'_i)$ である（全員が x を最も好むときには x が選ばれる）から，$z \neq x$ でなければならない。$B(z, 2\delta) \cap O_{-i}(R'_i) = \emptyset$ を満たす $\delta > 0$ をとる（$z \notin O_{-i}(R'_i)$ なので可能である）。まず次の効用関数を定義する。

$$\text{すべての } j \neq i \text{ について } \hat{u}_j(t) = \frac{d(t, A \setminus B(z, \delta))}{d(t, z) + d(t, A \setminus B(z, \delta))}$$

*16 もともと f が定義されているプロフィール（すべてのプロフィールであるが）に $f(R_i, R_{-i})$ が定義されているプロフィールのすべてが含まれている。したがってあるプロフィールにおいて別のプロフィールにおける自らの選好を選ぶことによって $f(R_i, R_{-i})$ を操作できるならば同じようにして f 自身を操作できる。

この $\hat{u}_j$ で表現される選好を $\hat{R}_j$ とすると $\hat{R}_j \in T_z$ であり（$\hat{u}_j(t)$ は $t=z$ のとき最大値 1 をとる）。$B(z,\delta)$ に含まれない t については $\hat{u}_j(t)=0$ であるから $t \in O_{-i}(R'_i)$ を満たす t について $\hat{u}_j(t)=0$ である（$B(z,2\delta)\cap O_{-i}(R'_i)=\emptyset$ より）。さらに次の効用関数を定義する。

$$\text{すべての } j \neq i \text{ について } u^*_j(t) = \frac{d(t,A\setminus B(x,\delta))}{2(d(t,x)+d(t,A\setminus B(x,\delta)))}$$

$B(x,\delta)\cap B(z,\delta)=\emptyset$ である（$x \in O_{-i}(R'_i)$ で $B(z,2\delta)\cap O_{-i}(R'_i)=\emptyset$ であるから）。この u^*_j で表現される選好を R^*_j とすると $R^*_j \in T_x$ である（$u^*_j(t)$ は $t=x$ のとき最大値 $\frac{1}{2}$ をとる）。これらの効用関数をもとに次の効用関数を定義する。

$$\text{すべての } j \neq i \text{ について } v_j = \hat{u}_j(t)+u^*_j(t)$$

この v_j で表現される選好を R^v_j とする。

次の社会的選択関数を定義する。

$$g''(R_{-i}) = f(R''_i, R_{-i})$$

これは個人 i の選好が特定の選好に固定されているという前提でのそれ以外の人々にとっての社会的選択関数であり，f が戦略的に操作不可能ならば $g''(R_{-i})$ も戦略的に操作不可能である。またそれが実現できる選択肢の集合（値域）は $O_{-i}(R''_i)$ に等しい。$z \in O_{-i}(R''_i)$ であり，すべての $x' \in O_{-i}(R''_i)\setminus\{z\}$ について $v_j(z) > v_j(x')$ であるから[*17]，補題 5.7 により $g''(R^v_{-i}) = f(R''_i, R^v_{-i}) = z$ を得る。同じく補題 5.7 によって $g'(R^v_{-i}) = f(R'_i, R^v_{-i}) = x$ が得られる[*18]。したがって f は個人 i によってプロフィール (R''_i, R^v_{-i}) において操作可能となり矛盾が生じるので，$O_{-i}(R'_i) = O_{-i}(R''_i)$ でなければならない。 ☺

補題 5.9. 個人 1 の選好を R_1 として，次のいずれかが成り立つ。

(1). 任意の R_1 について $O_{-1}(R_1)$ はただ 1 つの選択肢のみを含む。

(2). 任意の R_1 について $O_{-1}(R_1)$ はすべての選択肢を含む（$O_{-1}(R_1)=A_f$ である）。

証明. そうでないとすると個人 1 のある選好 R'_1 と選択肢 $x,y,z \in A_f$ があって

$$x,y \in O_{-1}(R'_1) \text{ で } z \notin O_{-1}(R'_1)$$

である。$R'_1 \in T_x$（議論を f^* に限定しているので R'_1 はいずれかの x について T_x に含まれる）および $zP'_i y$ と仮定する（補題 5.8 により $R'_1 \in T_x$ を満たすあらゆる選好 R'_i について $O_{-i}(R'_i)$ が等しい）。次にある選好 R'_2 が T_z に含まれ，かつ $O_{-1}(R'_1)$ の中で y を最も好むようなものであるとする[*19]。補題 5.7 により，個人 1 以外のすべての人々の選好が R'_2 であれば $f(R'_1,\ R'_{-1}) = y$ であ

[*17] $x' \notin B(z,\delta)$ ならば $\hat{u}_j(x')=0$ であり $u^*_j(x') \leqq \frac{1}{2}$ であるから $v_j(x') \leqq \frac{1}{2}$ である。また $x' \in B(z,\delta)$ ならば $u^*_j(x')=0$ であり $\hat{u}_j(t)$ は $t=z$ で最大値 1 をとるから $v_j(z) > v_j(x')$ であることが言える。

[*18] $t \in O_{-i}(R'_i)$ を満たす t について $\hat{u}_j(t)=0$ であり，$u^*_j(t)$ は $t=x$ において最大値 $\frac{1}{2}$ をとるから。

[*19] $z \notin O_{-1}(R'_1)$ であり，$O_{-1}(R'_1)$ が閉集合であるからコンパクトであり（A がコンパクトなので）R'_2 を表現する連続な効用関数 u'_2 は $O_{-1}(R'_1)$ に含まれるいずれかの点において最大値をとる。$O_{-1}(R'_1)$ が閉集合でなければ u'_2 を最大化する選択肢が $O_{-1}(R'_1)$ の中に存在しない可能性がある。

る。一方プロフィール p' において個人 1 の選好も上記の R'_2 ならば補題 5.1 により $f(p')=z$ である。そのとき f は個人 1 によってプロフィール (R'_1, R'_{-1}) において操作可能となる。したがって (1)，(2) のいずれかが成り立つ。 ☺

以上の補題によって定理の証明を完成させる。

定理 5.1 の証明. n（人数）に関する帰納法によって証明を進める。1 人のときには独裁者が存在するのは自明であるから 1 人から $n-1$ 人までの場合に定理が成り立つと仮定する。

補題 5.9 の (1) が成り立つとすると，個人 1 も含めすべての人々がある 1 つの選択肢を共通に最も好むときには f はその選択肢を選ぶので，$O_{-1}(R_1)$ は任意の R_1 について個人 1 の選好 R_1 において最も好まれる選択肢になるから，個人 1 が独裁者である。

(2) が成り立つとする。個人 1 の選好 R_1 を固定して $g_{R_1}(R_{-1})=f(R_1,R_{-1})$ と定義すれば，これは（個人 1 を除く）$n-1$ 人の戦略的に操作不可能な社会的選択関数であるから帰納法の仮定により独裁者が存在する。あらゆる R_1 についてすべて同じ個人が独裁者であれば，それが f の独裁者となる。そうでないとすると R_1 によって g_{R_1} の独裁者が異なる。次のように仮定する。

> 個人 1 の選好が R_1 のときの g_{R_1} の独裁者は個人 i で，個人 1 の選好が R'_1 のときの $g_{R'_1}$ の独裁者は個人 $j(\neq i)$ である。

選好 R_1 において xP_1y となる $x,y\in A_f$ が存在する（R_1 は唯一最も好む選択肢を持つから）。プロフィール p'' をとり，p'' において個人 1 の選好は R_1，個人 i は y を最も好み，個人 j は x を最も好むとする。i がこのときの独裁者であるから $f(p'')=y$ である。一方 p'' において個人 1 の選好のみが R'_1 に変ったプロフィールを p''' とすると j がそのときの独裁者であるから $f(p''')=x$ である。そうすると f は個人 1 によって p'' において操作可能となる（p'' において個人 1 は y より x を好む)。したがって n 人の場合も f は独裁者を持たなければならない。 ☺

6　複数の選択肢を選ぶ社会的選択ルール（続）(Ching and Zhou(2002))

この節では Duggan and Schwartz(2000)（「諸相」に含めた）とは異なる定義による複数の選択肢を選ぶ社会的選択ルール（社会的選択対応）の戦略的操作不可能性の問題を検討する[*20]。人々の選好は無差別関係を含むものであるとし R_i で表す（厳密な選好と無差別関係は P_i，I_i で表す)。選好のプロフィール p に対応して複数の選択肢の可能性も含めて最低 1 つの選択肢を選ぶような社会選択対応を f で表し，選好のプロフィール p において f が選ぶ選択肢の集合を $f(p)$ とする。人々の選好 R_i に対して効用関数 u を，xR_iy のとき（またそのときにのみ）$u(x)\geqq u(y)$ となるように定義すると，その効用関数で選好を表現することができる。また f が選ぶ選択肢の集合 A に含まれる選択肢 x に対してある確率を割り当てそれを $\lambda(x)$ とする。λ でそのときの確

[*20] 本節は S. Ching and L. Zhou, “Multi-valued strategy-proof social choice rules”, *Social Choice and Welfare*, vol. 19, pp. 569-580, 2002 にもとづく

率分布を表す。$\sum_{x\in A}\lambda(x)=1$ である。なお以下の分析では節によって人々の効用関数が連続であると仮定する所もある。

まず戦略的操作不可能性を次のように定義する。

戦略的操作不可能性 (strategy-proofness)　あるプロフィールを p，p においてある 1 人の人（i で表す）の選好だけが P_i' に変ったプロフィールを p' とする。p における個人 i の選好を表現する効用関数を u，ある選択肢 x に割り当てられる確率を $\lambda(x)$ とする。個人 i の選好を表現する**ある効用関数について**，$f(p)$ および $f(p')$ に含まれる選択肢に**ある確率を割り当てて**

$$\frac{\sum_{x\in f(p')}\lambda(x)u(x)}{\sum_{x\in f(p')}\lambda(x)}>\frac{\sum_{x\in f(p)}\lambda(x)u(x)}{\sum_{x\in f(p)}\lambda(x)}$$

となるとき，f は p において個人 i によって操作可能であると定義する。「どのようなプロフィールにおいても，誰によっても f は操作可能ではない」というのが戦略的操作不可能性の意味である。この定義においては特定の効用関数，特定の確率分布について偽りの選好を表明することが利益になる場合に操作可能とであると定義しているので Duggan and Schwartz(2000) における定義よりも操作可能となりやすい。逆に言えば戦略的に操作不可能とはなりにくい。また上記の意味で戦略的に操作不可能なとき「個人 i は選択肢の集合 $f(p')$ より $f(p)$ を好む」と定義する。すなわち，いかなる個人 i の選好を表現する効用関数についても，またどのような確率分布についても

$$\frac{\sum_{x\in f(p)}\lambda(x)u(x)}{\sum_{x\in f(p)}\lambda(x)}\geqq\frac{\sum_{x\in f(p')}\lambda(x)u(x)}{\sum_{x\in f(p')}\lambda(x)}$$

が成り立つとき $f(p')$ より $f(p)$ を好む*21。

次の補題ではこの戦略的操作不可能性の意味を考える。

補題 6.1. 選択肢の集合 X と Y について，個人 i が上記の定義の意味で Y より X を好むのは次の 2 つの条件がともに成り立つ場合，またその場合のみである。

(1). $X\setminus Y\neq\emptyset$ ならば，すべての $a\in X\setminus Y$，$b\in Y$ について aR_ib である。

(2). $Y\setminus X\neq\emptyset$ ならば，すべての $c\in X$，$d\in Y\setminus X$ について cR_id である。

証明. まず

$$E_{\lambda|X}(u)=\frac{\sum_{x\in X}\lambda(x)u(x)}{\sum_{x\in X}\lambda(x)},\ E_{\lambda|X\setminus Y}(u)=\frac{\sum_{x\in X\setminus Y}\lambda(x)u(x)}{\sum_{x\in X\setminus Y}\lambda(x)},\ E_{\lambda|X\cap Y}(u)=\frac{\sum_{x\in X\cap Y}\lambda(x)u(x)}{\sum_{x\in X\cap Y}\lambda(x)}$$

および

$$\lambda(X\setminus Y|X)=\frac{\sum_{x\in X\setminus Y}\lambda(x)}{\sum_{x\in X}\lambda(x)},\ \lambda(X\cap Y|X)=\frac{\sum_{x\in X\cap Y}\lambda(x)}{\sum_{x\in X}\lambda(x)}$$

*21 この定義においては常に $f(p)$ と $f(p')$ が比較可能であるとは限らない。どのような効用関数，確率分布についても少なくとも $f(p)$ の期待効用が $f(p')$ の期待効用より小さくないときにだけ $f(p')$ より $f(p)$ を好むと言え，効用関数や確率分布によって期待効用の大小関係が変る場合には明確な判断はできない。そのときは操作可能であると定義されている。

などと表す。(1)，(2) が十分条件であること（(1)，(2) が成り立つときに Y より X を好むということ）は次の式から言える。

$$\begin{aligned}E_{\lambda|X}(u) =&\lambda(X\setminus Y|X)E_{\lambda|X\setminus Y}(u)+\lambda(X\cap Y|X)E_{\lambda|X\cap Y}(u)\ (X=X\setminus Y+X\cap Y\ \text{より})\\ \geqq& E_{\lambda|X\cap Y}(u)\ ((1)\ \text{より})\\ \geqq&\lambda(Y\setminus X|Y)E_{\lambda|Y\setminus X}(u)+\lambda(X\cap Y|X)E_{\lambda|X\cap Y}(u)\ ((2)\ \text{より})\\ =&E_{\lambda|Y}(u)\ (Y=Y\setminus X+X\cap Y\ \text{より})\end{aligned}$$

次に個人 i が Y より X を好んでいて (1) が成り立たないと仮定してみよう。そのとき $a\in X\setminus Y$，$b\in Y$ で bP_ia となるものがある。そうすると ε を小さな正の数，$\lambda(a)=1-\varepsilon$，$\lambda(b)=\varepsilon$，$u(a)=0$，$u(b)=1$ とおき，a，b 以外の確率は 0 であるとすると

$$E_{\lambda|X}(u)\leqq\varepsilon<1=E_{\lambda|Y}(u)\ (b\in X\ \text{の可能性がある})$$

であるから個人 i が Y より X を好むことにはならない。個人 i が Y より X を好んでいて (2) が成り立たない場合も同様であり，$c\in X$，$d\in Y\setminus X$ で dP_ic となるものについて $\lambda(c)=\varepsilon$，$\lambda(d)=1-\varepsilon$，$u(c)=0$，$u(d)=1$ とおいて

$$E_{\lambda|X}(u)=0<1-\varepsilon\leqq E_{\lambda|Y}(u)$$

が得られる。 ☺

6.1　厳密な選好の場合

この小節では選択肢の数が有限個で人々の選好が無差別な関係を含まない厳密なものである場合を取り上げる。選択肢の数は 3 つ以上，人々の人数は 2 人以上で，すべての選択肢が選ばれる可能性があると仮定する。個人 i の選好は P_i で表される。その P_i において最も好まれる選択肢を $t(P_i)$ と書く（t は top の意味）。同様に P_i において最も好まれない選択肢を $b(P_i)$ と書く（b は bottom の意味，後で使う）。まず次の補題を示す。

補題 6.2 (全員一致性 (unanimity)). あるプロフィール p においてすべての人々がある選択肢 a を共通に最も好むとき f は a を選ぶ $(a\in f(p))$（a のみを選ぶとまでは主張しない）。

証明. f によって a が選ばれるようなプロフィールを p' とする（$a\in f(p')$）。ある 1 人の個人 i の選好が P'_i から P_i に変ったときのプロフィールを p'' とすると $a=t(P_i)$ であるから戦略的操作不可能性によって $a\in f(p'')$ でなければならない。同じ論理をすべての人々に適用して $a\in f(p)$ を得る。 ☺

独裁者は次のように定義される。

独裁者 (dictator)　あらゆるプロフィール p において常にある特定の個人 i が最も好む選択肢のみが選ばれるとき $(f(p)=t(P_i))$，その個人 i は独裁者である[*22]。

[*22] $t(P_i)\in f(p)$ であるだけでなく個人 i が最も好む選択肢だけしか選ばれないので非常に強い意味の独裁者である。

以上の準備のもとに次の定理を証明する。

定理 6.1. 社会的選択対応 f が戦略的に操作不可能で，一定（常に同じ選択肢を選ぶ，複数の選択肢を選ぶ場合も同様）でなければ独裁者が存在する。

証明. f が一定でなければ常に 1 つの選択肢しか選ばないことを示す。するとこの定理の結論はギバード・サタースウェイトの定理から導かれる。

(1).『どのようなプロフィールにおいても f が 2 つ以上の選択肢を選ぶ場合，それはすべての選択肢を選ぶ。』

あるプロフィール p において f がすべての選択肢ではなく一部の複数の選択肢を選ぶと仮定する。選択肢 a，b，c，個人 i について aP_ib であり $a,b\in f(p)$ かつ $c\notin f(p)$ であるとする。a，b，c について次の 3 種類の選好があり得る。

(i) ケース 1：P_i：$\dots a\dots b\dots c$

(ii) ケース 2：P'_i：$\dots a\dots c\dots b$

(iii) ケース 3：P''_i：$\dots c\dots a\dots b$

まずケース 1 の場合を考える。P_i，P'_i，P''_i において c 以外の選択肢に関する選好に変化はない。もとのプロフィールを p として i の選好のみが P'_i に変化したプロフィールを p' とする。$c\in f(p')\setminus f(p)$（$f(p)$ には含まれないが $f(p')$ に含まれる）であるとすると $a\in f(p)$ で aP'_ic であるから f は個人 i によって p' において操作可能となる。したがって $c\notin f(p')$ でなければならない。

さらに $x\notin f(p)$ で $x\neq c$ であるような x すべてについて $x\notin f(p')$ であることを示す。そうでなければ $x\in f(p')\setminus f(p)$ となる x が存在するが，そのとき戦略的操作不可能性により aP_ix，xP'_ia でなければならない[*23]。しかしこれは P_i と P'_i において c 以外の選択肢に関する選好が同じであるという仮定に反する。以上によって $f(p')\subset f(p)$ が示された（これは $x\notin f(p)$ ならば $x\notin f(p')$ であることを意味する)。$f(p')=f(p)$ ではないとすると $x\in f(p)\setminus f(p')$ を満たす x が存在する。そのとき戦略的操作不可能性によりすべての $y\in f(p')$ について xP_iy かつ yP'_ix でなければならない[*24]。これも矛盾である（$c\notin f(p')$ であるから $y\neq c$ であり，c 以外の選択肢に関する選好に変化はない)。したがって $f(p')=f(p)$ が示された。

次に個人 i の選好が P'_i から P''_i に変ったものとし，そのときのプロフィールを p'' と表す。$c\in f(p'')\setminus f(p')$（$f(p')$ には含まれないが $f(p'')$ に含まれる）であるとすると $b\in f(p')$，cP'_ib，かつ $f(p')=f(p)$ であるから f は個人 i によって p' において操作可能となる。したがって $c\notin f(p'')$ でなければならない。

次に $x\notin f(p')$ で $x\neq c$ であるような x すべてについて $x\notin f(p'')$ であることを示す。そ

[*23] xP_ia ならば f は p において個人 i によって操作可能であり，aP'_ix ならば p' において個人 i によって操作可能である。

[*24] ある $y\in f(p')$ について yP_ix であれば f は個人 i によって p において操作可能であり，xP'_iy であれば p' において操作可能である。

うでなければ $x \in f(p'') \setminus f(p')$ となる x が存在するが，そのとき戦略的操作不可能性によりすべての $y \in f(p')$ について $yP'_i x$, $xP''_i y$ でなければならない[*25]。しかしこれは P'_i と P''_i において c 以外の選択肢に関する選好が同じであるという仮定に反する。以上によって $f(p'') \subset f(p')$ が示された。$f(p'') = f(p')$ ではないとすると $x \in f(p') \setminus f(p'')$ を満たす x が存在する。そのとき戦略的操作不可能性によりすべての $y \in f(p'')$ について $xP'_i y$ かつ $yP''_i x$ でなければならない[*26]。これも矛盾である（$c \notin f(p'')$ であるから $y \neq c$ であり，c 以外の選択肢に関する選好に変化はない）。したがって $f(p'') = f(p')$ が示された。

さらに $c = t(P'''_i)$ であるような選好を P'''_i として個人 i の選好が P''_i から P'''_i に変ったとしても（そのようなプロフィールを p''' とする）$f(p''') = f(p')$ であり[*27]，かつ $c \notin f(p''')$ である。

同じようにして 1 人 1 人の選好を c が最上位になるように変化させることができ（c 以外の選択肢についての選好に変化はない），それによって f が選ぶ選択肢の集合は変らない。すなわち c は選ばれない。しかしこれは全員一致性に反するから p においてそもそも c が選ばれていなければならない。よって f はすべての選択肢を選ぶ。

(2).『f が一定でなければただ 1 つの選択肢しか選ばない』

(1) の証明により f が複数の選択肢を選ぶならばすべての選択肢を選ぶことがわかった。常にすべての選択肢を選ぶならば f は一定であり（常に同じ選択肢を選ぶ），常に 1 つの選択肢しか選ばないのであればギバード・サタースウェイトの定理が当てはまるから，そのいずれでもないとすればプロフィールによってすべての選択肢を選んだり，1 つの選択肢を選んだりすることになる。1 人づつの選好を順に変化させることによってあらゆるプロフィールを作ることができるから，あるプロフィールにおいてある 1 人の個人 i の選好の P_i から P'_i への変化によって f がすべての選択肢を選ぶ状態から 1 つの選択肢のみを選ぶ状態に変ることがある。変化前と変化後のプロフィールをそれぞれ p，p' とする。P_i から P'_i への変化を考えると $f(p)$ がすべての選択肢を選ぶから $f(p') = b(P_i)$ である。そうでなければ $f(p')P_i c$ となるような $c \in f(p) \setminus f(p')$ が存在するが，そのとき f は個人 i によって p において操作可能である。逆に P'_i から P_i への変化を考えると $f(p)$ がすべての選択肢を選ぶから $f(p') = t(P'_i)$ である。そうでなければ $t(P'_i) \in f(p) \setminus f(p')$ で $t(P'_i)P'_i f(p')$ となるが，そのとき f は個人 i によって p' において操作可能である。したがって $b(P_i) = t(P'_i)$ でなければならない。ここで個人 i の選好 P''_i を $t(P''_i) \neq b(P_i) = t(P'_i) \neq b(P''_i)$ となるようにとる（そのような選好を考えることは可能である）。上の議論と同様にして，$f(p'')$ がただ 1 つの選択肢を選ぶならば $t(P''_i) = b(P_i)$ であり，$f(p'')$ がすべての選択肢を選ぶならば $t(P'_i) = b(P''_i)$ である。どちらにしても矛盾が生じる。よってそもそも f が一定でなければ

[*25] $xP'_i y$ ならば f は p' において個人 i によって操作可能であり，$yP''_i x$ ならば p'' において個人 i によって操作可能である。

[*26] ある $y \in f(p'')$ について $yP'_i x$ であれば f は個人 i によって p' において操作可能であり，$xP''_i y$ であれば p'' において操作可能である。

[*27] ケース 3 として $c = t(P'''_i)$ であるような選好をとることができる。

ただ 1 つの選択肢しか選ばない。

☺

6.2 連続な選好の場合

この小節では前節の Barbera and Peleg(1990) による分析と同様に選択肢の集合 A が距離空間（あるいはユークリッド空間）のコンパクトな部分集合（ユークリッド空間ならば有界閉集合）であり，人々の選好が連続な効用関数で表される場合を考える。このとき人々の選好が連続であると表現する。その場合には複数の選択肢（距離空間の部分集合内の複数点で表される）について人々の選好が無差別となる場合がある。個人 i が選好 R_i において最も好む選択肢の集合を $T(R_i)$，最も好まない選択肢の集合を $B(R_i)$ で表す。個人 i が独裁者であるとは任意のプロフィール p において $f(p) \subset T(R_i)$ になること，すなわち f が複数の選択肢を選ぶとしてもそれらのすべてが $T(R_i)$ に含まれていることである。

数学の「整列可能定理」によって A に含まれる選択肢には適当に順序をつけることができる。それを「A の順序」と呼ぶことにする。整列可能定理は「ツォルンの補題」とともに「選択公理」と同値であることが集合論の教科書に書かれている（選択公理および順序集合については第 1 節参照)。

■整列可能定理

「整列集合」: 順序集合は，その任意の部分集合が最小元（決めた順序によって最小となる要素）を持つとき整列集合であるという。

「整列可能定理」: 任意の集合は整列集合となるように順序を定めることができる。

自然数なら簡単だが，実数や，実数の組からなるベクトル，距離空間の点についてはどのように順序を定めれば整列集合となるのか明らかではない。しかし選択公理を仮定するとこの定理が証明される。証明は省略する。

以下の議論では人々が最も好む選択肢が 1 つであると仮定する[*28]。したがって $T(R_i)$ は集合ではなく 1 つの選択肢を表す。以上の準備のもとに次の定理を示す。

定理 6.2. 人々の選好が連続であり，f が選ぶ選択肢の数が 3 つ以上であれば f は一定か，さもなくば独裁者が存在する。

証明. 定理 6.1 の証明の内 (2) はそのままこのケースにも当てはまる。しかし，(1) で用いたいくつかのプロフィールは選好の連続性を満たさないので異なる証明が必要である。以下では定理 6.1 の証明の (1) に対応した「$f(p)$ が複数の選択肢を選ぶならばすべての選択肢（f によって選ば

[*28] 原論文には，そうでない場合にも簡単に結論を拡張できると書かれているが，詳しい証明は省略されている。Barbera and Peleg(1990) の補題 5.5（本稿の 25 ページ）を参考にすれば証明できるかもしれない。

れる可能性のあるすべての選択肢）を選ぶ」という内容を示す。

2 つの段階に分けて証明を進める。

(1).『各プロフィール p においてすべての個人 i について $T(R_i) \in f(p)$ である。』

f をもとにして 1 つの選択肢のみを選ぶ社会的選択関数 $\tilde{f}^i$ を作る。まず $\bar{f}^i(p) = \{a \in f(p) |$ すべての $x \in f(p)$ に対して $aR_i x\}$ と定義する。$\bar{f}^i(p)$ はプロフィール p において個人 i が $f(p)$ の中で最も好む選択肢の集合である。$\bar{f}^i(p)$ の中で上で定義した A の順序によって最小となる選択肢を $\tilde{f}^i(p)$ とする。これはただ 1 つの選択肢を選ぶ社会的選択関数である。この $\tilde{f}^i$ が戦略的に操作不可能であることを証明しよう。まず個人 i が偽りの選好を表明するインセンティブを持たないことを示す。2 つの選好 R_i，R'_i をとり，それぞれに対応したプロフィールを p，p' とする。個人 i 以外の選好は同じである。戦略的操作不可能性を調べるには $\tilde{f}^i(p) \neq \tilde{f}^i(p')$ の場合を考えればよい。ともに $f(p) \cap f(p')$ に含まれているならば $\tilde{f}^i(p)$ の定義から $\tilde{f}^i(p) R_i \tilde{f}^i(p')$ である。このとき個人 i にとって p において R'_i を表明するインセンティブはない。そうでないときは，$\tilde{f}^i(p) \in f(p) \setminus f(p')$ か $\tilde{f}^i(p') \in f(p') \setminus f(p)$ か，あるいはこれらの両方が成り立つ。f は戦略的に操作不可能であるからそのいずれであっても $\tilde{f}^i(p) R_i \tilde{f}^i(p')$ でなければならず，p において R'_i を表明するインセンティブはない。

次に個人 i 以外のすべての人々にとっても偽りの選好を表明するインセンティブがないことを示す（$\tilde{f}^i$ は個人 i の選好にもとづいて作っている）。個人 i 以外のある人を j で表し，2 つの選好 R_j，R'_j をとって，それぞれに対応したプロフィールを p，p' とする。個人 j 以外の選好は同じである（R_{-j} で表す）。やはり戦略的操作不可能を調べるには $\tilde{f}^i(p) \neq \tilde{f}^i(p')$ の場合を考えればよい。まずこれら両者が $f(p) \cap f(p')$ に含まれることはない。もしそうであるとすると $\tilde{f}^i$ の定義から $\tilde{f}^i(p) R_i \tilde{f}^i(p')$ かつ $\tilde{f}^i(p') R_i \tilde{f}^i(p)$ なので（この場合の p と p' において個人 i の選好は同じ），$\tilde{f}^i(p)$，$\tilde{f}^i(p')$ ともに $\bar{f}^i(p) \cap \bar{f}^i(p')$ に含まれ，かつそれぞれがもう一方よりも A の順位において下位にあることになるが，そのようなことはありえない。両方ともに $f(p) \cap f(p')$ に含まれないとすると $\tilde{f}^i(p) \in f(p) \setminus f(p')$ か $\tilde{f}^i(p') \in f(p') \setminus f(p)$ か，あるいはこれらの両方が成り立つ。f の戦略的操作不可能性によりそのいずれであっても $\tilde{f}^i(p) R_j \tilde{f}^i(p')$ でなければならないので個人 j が p において R'_j を表明するインセンティブはない。

最後に $\tilde{f}^i$ はすべての選択肢を選ぶ可能性がある（$\tilde{f}^i$ は 1 つの選択肢を選ぶ関数であるが，それが選ぶ選択肢の範囲が A 全体であることを意味する。A の定義から f 自身は A のすべての選択肢を選ぶ可能性がある）ことを示す。あるプロフィール p において $x \in f(p)$ となる $x \in A$ をとる。$x = T(R'_i)$（正しくは $\{x\} = T(R'_i)$，以下同様）を満たす個人 i の選好 R'_i をとると，戦略的操作不可能性によって $x \in f(R'_i, R_{-i})$ でなければならない[*29]。そのとき $\tilde{f}^i$ の定義から $x = \tilde{f}^i(R'_i, R_{-i})$ である。これがすべての $x \in A$ について成り立つ。

以上の議論によって前節の Barbera and Peleg(1990) の定理を用いれば $\tilde{f}^i$ は独裁者を持

[*29] そうでなければ個人 i はプロフィール (R'_i, R_{-i}) において R_i（p におけるプロフィール）を表明することによって x を実現できる。

つことが言える。$\tilde{f}^i$ の独裁者が i 以外の個人 j であると仮定してみよう。f が複数の選択肢を選ぶようなプロフィールを p とし，$x=\tilde{f}^i(p)$，$y\in f(p)\setminus\{\tilde{f}^i(p)\}$ であるとする。j が $\tilde{f}^i(p)$ の独裁者であるから $x=T(R_j)$ である（j が f の独裁者であるというわけではない）。$T(R'_i)=y$ であるような個人 i の選好 R'_i を考える。$y\in f(p)$ であるから戦略的操作不可能性によって $y\in f(R'_i,R_{-i})$ でなければならない[*30]。そのとき $\tilde{f}^i$ の作り方から $y=\tilde{f}^i(R'_i,R_{-i})$ である。しかし j が $\tilde{f}^i$ の独裁者であって j は (R'_i,R_{-i}) において p と同じ選好を持つので x を最も好んでいるはずであるから $x=\tilde{f}^i(R'_i,R_{-i})$ でなければならず矛盾が生じる。したがって i が $\tilde{f}^i$ の独裁者でなければならず，任意のプロフィール p において $T(R_i)=\tilde{f}^i(p)\in f(p)$ が得られる。以上の議論はすべての人々に当てはまる（i 以外の j については $\tilde{f}^j$ を考えれば j がその独裁者となる）。

(2).『$a,b,c\in A$ とする。任意のプロフィール p において，(1) の個人 i について aP_icP_ib，かつ $a,b\in f(p)$ ならば $c\in f(p)$ である。』
$c\notin f(p)$ と仮定してみる。プロフィール p' をとり $c=T(R'_i)$ であるとする。i は (1) で考えた $\tilde{f}^i$ の独裁者であるから $c=\tilde{f}^i(R'_i,R_{-i})$ である（(R'_i,R_{-i}) は個人 i の選好のみが変化したプロフィール）。したがって $c\in f(R'_i,R_{-i})$ でなければならない。結局 $c\in f(R'_i,R_{-i})\setminus f(p)$，$b\in f(p)$，$cP_ib$ であることになるが，そのとき f は個人 i によって p において操作可能となる。

以上 2 つの段階にもとづいて定理 6.1 の (1) に相当する内容を証明する。あるプロフィールにおいて f が，すべてではない複数の選択肢を選ぶと仮定し，p において $a=T(R_i)$ であるとする。今証明したこの定理の (1) によって $a\in f(p)$ でなければならない。選択肢 $b,c\in A$ をとり $b\in f(p)$, $b\neq a,c\notin f(p)$ であるとする。ここで個人 i の選好が R_i から $T(R'_i)=a$，$B(R'_i)=b$ であるような選好 R'_i に変ったとする[*31]。戦略的操作不可能性により $a\in f(R'_i,R_{-i})$ である[*32]。さらに $b\in f(R'_i,R_{-i})$ でなければならない。そうでないとすると $b\in f(p)\setminus f(R'_i,R_{-i})$，$a\in f(R'_i,R_{-i})$ かつ aP_ib であることになり戦略的操作不可能性に反する[*33]。以上によって $a,b\in f(R'_i,R_{-i})$ かつ $aP'_icP'_ib$ である。すると (2) により $c\in f(R'_i,R_{-i})$ でなければならないから，結局 $c\in f(R'_i,R_{-i})\setminus f(p)$，$a\in f(p)$ かつ aP'_ic であるという事実を得る。しかし，そのとき f は個人 i によって (R'_i,R_{-i}) において操作可能となる。したがって $c\in f(p)$ である。 ☺

[*30] そうでないとするとプロフィール (R'_i,R_{-i}) において個人 i が R_i を表明することによって y を実現できる。
[*31] a の近傍で正の値をとり，b の近傍で負の値をとるような効用関数を考えればよい。
[*32] そうでなければ，$a\in f(p)$ なので個人 i はプロフィール (R'_i,R_{-i}) において選好 R_i を表明することによって a を実現できる。
[*33] p において個人 i が f を操作することが可能となる。

7　アローの定理，ギバード・サタースウェイトの定理と選好逆転 (Eliaz(2004))

この節では「選好逆転 (preference reversal)」をキーワードにアローの定理とギバード・サタースウェイトの定理を統一的に理解しようとする試みを紹介する[*34]。人々の選好は無差別関係を含まない厳密なものであるとし，それをこの節でも P_i で表す。個人 i の選好は P_i，P_i' などで表されるが，プロフィールは p，p' などと書く。選択肢の数は有限である。それぞれのプロフィールにおいて社会的選択ルール $f(p)$ が定義され，ある f において選択肢 x，y が社会的にある関係になっていることを $xf(p)y$ と書く。またその関係になっていないことを $x\neg f(p)y$ と書く。この $f(p)$ について次の性質を定義する。

Acyclicality(AC)　任意のプロフィール p，任意の 3 つの選択肢の組 x,y,z について，$xf(p)y$，$z\neg f(p)y$ ならば $z\neg f(p)x$ である。

Completeness(完備性)　任意のプロフィール p，任意の 2 つの選択肢の組 x,y について $xf(p)y$ または $yf(p)x$ である。

Existence of a best alternative (BA)（最良選択肢の存在）　すべてのプロフィール p において $f(p)$ における最良の選択肢が存在する。最良の選択肢とは他のすべての選択肢 y に対して $xf(p)y$ となるような選択肢 x である。

アローの社会的厚生関数（二項的社会選択ルール）や社会的選択関数がこれらの条件を満たすかどうかを見てみよう。社会的厚生関数の場合 $xf(p)y$ は社会的選好において y より x が好まれるかまたは無差別であることを意味する。$f(p)$ によって導かれる社会的な選好は完備性，推移性を満たすことが求められるが，条件 C が完備性に当たる。また完備性のもとにおいて条件 AC の $z\neg f(p)y$（$zf(p)y$ ではないという意味）は $yf(p)z$ を意味するので，この条件は「$xf(p)y$，$yf(p)z$ ならば $xf(p)z$ である」という内容になり推移性を意味することがわかる（完備性がなくても以下で証明する補題 7.3 からも言える）。推移性と完備性を仮定すると有限個の選択肢の中に必ず最良の選択肢が存在する（1 つとは限らないかもしれない）ので条件 BA が成り立つ。以上によってアローの社会的厚生関数は上記の 3 つの条件を満たす $f(p)$ の一種である。次にギバード・サタースウェイトの定理で想定される社会的選択関数について考えてみよう。社会的選択関数を $f(p)$ とし，プロフィール p において f が x を選ぶときに，x 以外の任意の選択肢を y として $xf(p)y$ であると定義すると，その x が最良の選択肢となるから条件 BA が成り立つ（この場合 x は唯一最良の選択肢である）。また p において y が f によって選ばれないことを y 以外の任意の選択肢を z として $y\neg f(p)z$ と定義すれば（z が選ばれるという意味ではない，単に y が選ばれないことを意味する）「$xf(p)y$ かつ $z\neg f(p)y$ のとき $z\neg f(p)x$」が成り立つので条件 AC を満たす。一方 x が選ばれるときには x 以外の選択肢 y，z について $yf(p)z$ または $zf(p)y$ ではないので条件 C（完備性）は満たされない。したがって社会的選択関数は条件 AC と BA を満たす社会的選択

[*34] 本節は K. Eliaz, “Social aggregators”, *Social Choice and Welfare*, vol. 22, pp. 317-330, 2004

ルールである。

社会的選択ルールは以下のようないくつかの特徴を持つことが求められる。

パレート効率性 (Pareto efficiency, PAR)　選択肢 x，y についてすべての人々が y より x を好んでいるならば「$xf(p)y$ かつ $y\neg f(p)x$」または「$x\neg f(p)y$ かつ $y\neg f(p)x$」である。

社会的厚生関数の場合は前者が当てはまる。社会的選択関数の場合 x が選ばれるときは前者が，x が選ばれないときは後者が当てはまる。

無関係選択肢からの独立性 (IIA)　x，y に関する $f(p)$ の値はそれらに関する人々の選好のみによって決まる。

この条件は社会的厚生関数にのみ関係する。

単調性 (monotonicity, MON)　プロフィール p，p' をとり，すべての $y \neq x$ について $xf(p)y$ であるとする。すべての人々，すべての $y \neq x$ について「xP_iy ならば xP'_iy」が成り立つとき $xf(p')y$ である。

この条件は社会的選択関数にのみ関係する。Muller and Satterthwaite(1977) の SPAP(Strong positive association)（「諸相」参照）と同じ条件であり，そこで証明されているように戦略的操作不可能性と同値である。

独裁者がいないこと　独裁者は次のように定義される。ある個人 i について，すべてのプロフィール p において任意の選択肢の組 x，y に関して「xP_iy ならば $y\neg f(p)x$」が成り立つとき i は独裁者である。この条件はそのような独裁者がいないことを求める。

この独裁者の定義が社会的厚生関数，社会的選択関数の独裁者の定義と一致することを確認しよう。まず社会的厚生関数について考える。f が社会的厚生関数ならば条件 C が成り立つ。したがって $y\neg f(p)x$ は $xf(p)y$ かつ $yf(p)x$ ではないことを意味する。これは社会的に y より x が厳密に好まれるという意味である。したがって上記の定義による独裁者は社会的厚生関数の独裁者（アローの定理の独裁者）である。次に社会的選択関数を考える。社会的選択関数における独裁者とは, 常に自分が最も好む選択肢が社会によって選ばれるような個人である。ということは独裁者を i として xP_iy（プロフィール p において）となっているような選択肢 y は f によって選ばれない。すなわち $y\neg f(p)x$ が成り立つ。社会的選択関数は常に 1 つの選択肢を選ぶように定義されているので，個人 i が最も好む選択肢が x であれば x 以外の選択肢は選ばれないので，x が選ばれるしかない。よって社会的選択関数の独裁者も上記の定義に合致する。

次にこの節のキーワードである「選好逆転」を定義する。

選好逆転 (preference reversal, PR)　ある選択肢の組 x，y についてプロフィール p において $xf(p)y$ かつ $y\neg f(p)x$ であるとする[*35]。p' において $yf(p')x$ ならば[*36]，少なく 1 人の xP_iy であるような個人について yP'_ix である。

[*35] 社会的厚生関数の場合は y より x が厳密に好まれることを，社会的選択関数の場合には x が選ばれることを意味する。

[*36] 社会的厚生関数の場合は x より y が好まれるか無差別であることを，社会的選択関数の場合には y が選ばれることを意味する。

これはあるプロフィール p において社会的厚生関数や社会的選択関数について y より x が上位にあり，プロフィール p' においてその関係がそれぞれの意味で逆転したときに，p において y より x を好む人の内の誰かの選好が逆にならなければならないという意味である。

以下では条件 BA，AC，PAR，PR を満たす社会的選択ルールに独裁者が存在することを証明するが，その前にいくつかの補題が必要となる。

補題 7.1. 社会的選択ルール f が社会的選択関数であるとする。それが MON（単調性）を満たすならば PR を満たす。

証明. 2 つの選択肢 x，y，プロフィール p，p' を次のようにとる。

(1). p: すべての $z \neq x$ について $xf(p)z$（このとき x が選ばれる）。
(2). p': すべての $w \neq y$ について $yf(p')w$（このとき y が選ばれる）。すべての人々について xP_iy ならば xP'_iy。

別のプロフィール p'' をとり次のように仮定する。

p'': xP_iy である人々について，すべての $z \neq x, y$ に関して $xP''_iyP''_iz$。
p'': yP_ix である人々について，すべての $z \neq x, y$ に関して $yP''_ixP''_iz$。

p から p'' にプロフィールが変ったとき誰の選好においても x の位置は下がっていない。したがって MON によって p'' においてもすべての $z \neq x$ について $xf(p'')z$ である。一方 p' から p'' にプロフィールが変ったときには誰の選好においても y の位置は下がっていない。したがってやはり MON によってすべての $w \neq y$ について $yf(p'')w$ が成り立つ。よって p'' においては $xf(p'')y$ と $yf(p'')x$ が同時に成り立つことになるが，これは $f(p'')$ において x と y がともに選ばれることを意味することになり矛盾である。したがって PR が成り立つ。 ☺

補題 7.2. 社会的選択ルール f が社会的厚生関数であり，条件 AC，BA，C を満たすとする。そのとき f が PAR，IIA を満たせば PR も満たす。

証明. f が AC，BA，C，PAR，IIA を満たしていて PR を満たさないとする。そのとき次のような選択肢の組 x，y と 2 つのプロフィール p，p' が存在する。

(1). P_1: $xf(p)y$ かつ $y\neg f(p)x$。
(2). P_2: $yf(p')x$。
(3). P_3: xP_iy かつ yP'_ix であるような個人はいない。

IIA によって x と y に関する社会の選好が変化するならば誰かの選好において x と y の関係が変っていなければならない。その内の 1 人を個人 j とする。P_3 によって個人 j の x と y に関する選好は次のようでなければならない。

$$yP_jx \text{ かつ } xP'_jy \tag{7.1}$$

そのとき $xf(p)y$ であるから PAR と P_3 によって少なくとも 1 人の個人（k とする）の選好にお

いて次の関係が成り立っていなければならない。

$$xP_k y \text{ かつ } xP'_k y \tag{7.2}$$

個人 j，k ともに p' において y より x を好んでいるから，PAR によってこの 2 人の他に p' において x より y を好む人（l とする）がいなければならない。P_3 によって l の選好は以下のようである。

$$yP_l x \text{ かつ } yP'_l x \tag{7.3}$$

以上によって p，p' におけるこれら 3 人と社会の選好は次のようにまとめられる。

(1). p : $yP_j x$, $xP_k y$, $yP_l x$, $xf(p)y$ かつ $y\neg f(p)x$。
(2). p' : $xP'_j y$, $xP'_k y$, $yP'_l x$, $yf(p')x$。

さらに別の選択肢 z をとって，x と y に関する人々の選好は p' と同じで以下の条件を満たすプロフィール p'' を考える。

(1). P''_1: $xP'_i y$ かつ $xP_i y$ である人々について $xP''_i zP''_i y$。
(2). P''_2: $xP'_i y$ かつ $yP_i x$ である人々について $xP''_i yP''_i z$。
(3). P''_3: $yP'_i x$ かつ $yP_i x$ である人々について $yP''_i xP''_i z$。

この p'' において上記の個人 j，k，l は次のような選好を持つ。

(1). 個人 j : $xP''_j yP''_j z$。
(2). 個人 k : $xP''_k zP''_k y$。
(3). 個人 l : $yP''_l xP''_l z$。

P''_1〜P''_3 によりすべての人々について $xP''_i z$ であるから条件 PAR, C により $xf(p'')z$ かつ $z\neg f(p'')x$ である。また $yf(p')x$ なので IIA により $yf(p'')x$ である。条件 AC により $yf(p'')x$，$z\neg f(p'')x$ から $z\neg f(p'')y$ が得られるが，条件 C によりこれは $yf(p'')z$ を意味する。したがって p'' においては次の関係が成り立つ。

$$yf(p'')x,\ xf(p'')z,\ yf(p'')z,\ z\neg f(p'')x \tag{7.4}$$

さらに次の条件を満たすプロフィール p''' をとる。

(1). P'''_1 : $xP_i y$ である人々は $zP'''_i xP'''_i y$。
(2). P'''_2 : $yP_i x$ である人々は $yP'''_i zP'''_i x$。

p''' において上記の個人 j，k，l は次のような選好を持つ。

(1). 個人 j : $yP'''_j zP'''_j x$。
(2). 個人 k : $zP'''_k xP'''_k y$。
(3). 個人 l : $yP'''_l zP'''_l x$。

すべての人々が x より z を好むので条件 PAR，C により次の関係が成り立つ。

$$zf(p''')x,\ x\neg f(p''')z$$

x と y に関する人々の選好は p と p''' とで同一であるから IIA により $xf(p''')y$，$y\neg f(p''')x$ を得る。$zf(p''')x$ と $y\neg f(p''')x$ から条件 AC によって $y\neg f(p''')z$ が得られる。したがって条件 C によって $zf(p''')y$ でなければならない。しかし p'' と p''' とで y と z に関する人々の選好は同一であるから IIA と矛盾する。 ☺

もう 1 つ準備をする。

補題 7.3. 条件 AC を満たす選択肢の二項関係 R について「xRy かつ yRz ならば xRz」が成り立つ。

証明. xRy，yRz だが $x\neg Rz$ であるとする。yRz，$x\neg Rz$ および AC によって $x\neg Ry$ でなければならないがこれは矛盾である。 ☺

以上の準備のもとで次の定理を示す。

定理 7.1. 社会的選択ルール f が条件 AC，BA，PAR，PR を満たすならば独裁者が存在する。

証明. (1). すべての人々が x を最も好み，y を最も好まない（最も嫌う）ようなプロフィールを p^0 とする。BA および PAR により

$$\text{すべての } z\neq x \text{ について } xf(p^0)z \text{ かつ } z\neg f(p^0)x \tag{7.5}$$

が成り立つ。ここで個人 1 の選好において y の位置が 1 つづつ上がって行くような選好の変化を考える。PR により個人 1 の選好において y が x より下に位置する限り $yf(p)x$ となることはない。また x と z の選好は変化していないので $zf(p)x$ となることもない。条件 BA によって最良の選択肢が存在しなければならないが上の議論から x がその最良の選択肢である。y が個人 1 の選好において x の上になっても PR によって x と他の選択肢との関係は変らない。x と y の関係は変る可能性があるが，もし変らないとすると，個人 2 の選好において同じように y を 1 つづつ上げて行く。それでも x と y の関係が変らなければ同様にして個人 3，4，$\cdots$ の選好において y を 1 つづつ上げて行くと，PAR と BA によって誰かの選好において y が x より上に位置するようになったときに $yf(p)x$ となる。そのような個人を k とする（そのとき y は k の選好において最上位に位置する）。x が個人 k の選好において 2 番目に位置するようなプロフィールを $p^{(1.2)}$，x が最上位に位置するプロフィールを $p^{(1.1)}$ と表すとこれらは次のようなプロフィールである（P_i などの記号は省略する）。

$p^{(1.1)}$:
個人 1〜個人 $k-1$：$yx\cdots$
個人 k：$xy\cdots$
個人 k〜個人 n：$x\cdots y$
$p^{(1.2)}$:
個人 1〜個人 $k-1$：$yx\cdots$
個人 k：$yx\cdots$

個人 k〜個人 n：$x \cdots y$

上の議論と BA によって $p^{(1.1)}$ においては

$$\text{すべての } z \neq x \text{ について } z \neg f(p^{(1.1)})x \text{ かつ } xf(p^{(1.1)})z$$

が成り立つ。ここで $p^{(1.2)}$ において次の関係が成り立つことを示す。

$$\text{すべての } z \neq y \text{ について } yf(p^{(1.2)})z \tag{7.6}$$

$$\text{かつ } z \neg f(p^{(1.2)})y \tag{7.7}$$

まず個人 k に関する仮定により $yf(p^{(1.2)})x$ である。また x，y 以外の選択肢と x に関する選好に変化はないので，すべての $z \neq x,y$ について $z \neg f(p^{(1.2)})x$ である。したがって AC により $z \neg f(p^{(1.2)})y$ を得る。これで (7.7) が示された。また x に対しては (7.6) が成り立つ。(7.6) に反して，ある $z \neq x,y$ について $y \neg f(p^{(1.2)})z$ であると仮定してみよう。すべての $z \neq x,y$ について $z \neg f(p^{(1.2)})x$ であるから BA によって x は最良の選択肢である。したがって $xf(p^{(1.2)})z$ を得る。$yf(p^{(1.2)})x$ であるから補題 7.3 より $yf(p^{(1.2)})z$ が得られる。これは仮定と矛盾するので (7.6) が示された。

(2). 次のような 2 つのプロフィール $p^{(2.1)}$，$p^{(2.2)}$ を考える（P_i などの記号は省略する）。

$p^{(2.1)}$:

個人 1〜個人 $k-1$：$y \cdots x$

個人 k：$xy \cdots$

個人 k〜個人 n：$\cdots xy$

$p^{(2.2)}$:

個人 1〜個人 $k-1$：$y \cdots x$

個人 k：$yx \cdots$

個人 k〜個人 n：$\cdots xy$

人々の選好が $p^{(1.2)}$ から $p^{(2.2)}$ に変化したとしても y とそれ以外の選択肢に関する選好に変化はないので PR によって

$$\text{すべての } z \neq x,y \text{ について } z \neg f(p^{(2.2)})y \tag{7.8}$$

が得られる。ある $w \neq y$ について $y \neg f(p^{(2.2)})w$ であるとすると BA と (7.8) によって x が「すべての $z \neq x$ について $xf(p^{(2.2)})z$」を満たさなければならない。特に $xf(p^{(2.2)})y$ かつ $xf(p^{(2.2)})w$ である。（したがって AC により $y \neg f(p^{(2.2)})x$ となる。）$yf(p^{(1.2)})x$ であったから PR により誰かの選好が yP_ix から xP_iy に変っていなければならない。しかしそうはなっていないので矛盾が生じるから次の関係が成り立たなければならない。

$$\text{すべての } z \neq y \text{ について } yf(p^{(2.2)})z$$

次に以下の結果を証明する。

$$\text{すべての } z \neq x \text{ について } xf(p^{(2.1)})z \text{ かつ } z \neg f(p^{(2.1)})x \tag{7.9}$$

プロフィールが $p^{(1.1)}$ から $p^{(2.1)}$ に変っても x と y に関する選好は誰についても変化していないので PR によって $y\neg f(p^{(2.1)})x$ が成り立つ。また $p^{(2.1)}$ と $p^{(2.2)}$ とでは誰についても y と任意の $z\neq x,y$ との選好は同じなので PR によって

$$\text{すべての } z\neq x,y \text{ について } z\neg f(p^{(2.1)})y \tag{7.10}$$

が成り立つ。(7.10) と $y\neg f(p^{(2.1)})x$ から BA によってすべての $z\neq x$ について $xf(p^{(2.1)})z$, 特に $xf(p^{(2.1)})y$ である。(7.10) と AC により $z\neg f(p^{(2.1)})x$ を得る。したがって (7.9) が示された。

(3). $z\neq x,y$ として次のプロフィール $p^{(3)}$ を考える。

$p^{(3)}$:
個人 1〜個人 $k-1$：$\cdots zyx$
個人 k：$xyz\cdots$
個人 k〜個人 n：$\cdots zxy$

次の結果を示す。

$$\text{すべての } z\neq x \text{ について } xf(p^{(3)})z \text{ かつ } z\neg f(p^{(3)})x \tag{7.11}$$

$wf(p^{(3)})x$ を満たすある選択肢 w が存在すると仮定する。そのとき PR によって誰かの選好において $xP_i^{(2.1)}w$ から $wP_i^{(3)}x$ に変化していなければならないがそのような個人はいない。したがって $wf(p^{(3)})x$ を満たす w は存在しない。BA によってすべての $z\neq x$ について $xf(p^{(3)})z$ である。以上によって (7.11) を得る。

(4). 次のプロフィール $p^{(4)}$ を考える。

$p^{(4)}$:
個人 1〜個人 $k-1$：$\cdots zyx$
個人 k：$xzy\cdots$
個人 k〜個人 n：$\cdots zyx$

$p^{(3)}$ から $p^{(4)}$ へ変化したとき誰の選好においても x と任意の $z\neq x,y$ との関係が変っていないから PR によって

$$\text{すべての } z\neq x,y \text{ について } z\neg f(p^{(4)})x$$

が成り立つ。ここで

$$\text{すべての } z\neq x \text{ について } xf(p^{(4)})z \text{ および } y\neg f(p^{(4)})x$$

を示す。$yf(p^{(4)})x$ と仮定すると $z\neg f(p^{(4)})x$ であるから条件 AC によって $z\neg f(p^{(4)})y$ となる。$p^{(4)}$ においてはすべての人々が y より z を好んでいるので PAR によって $y\neg f(p^{(4)})z$ である。BA によって最良の選択肢がなければならないがそれは x でなければならない。すなわち，すべての $z\neq x$ について $xf(p^{(4)})z$ が成り立つ。そのとき $yf(p^{(4)})x$ かつ $xf(p^{(4)})z$ であることになり補題 7.3 より $yf(p^{(4)})z$ が得られる。しかしこれは上の $y\neg f(p^{(4)})z$ と矛盾する。したがって「$y\neg f(p^{(4)})x$ かつ，すべての $z\neq x$ について $xf(p^{(4)})z$」を得る。

(5). 上記の個人 k が y より x を好むような任意のプロフィール p^* を考える。誰の選好においても，$p^{(4)}$ と比べて p^* において，x の y に対する相対的な位置が下がることはない（k 以外の人々はもともと x より y を好んでいる）。したがって PR によって $y\neg f(p^*)x$ である（$xf(p^{(4)})y$ かつ $y\neg f(p^{(4)})x$ であるから）。よって個人 k が y より x を好んでいる限りいかなるプロフィール p^* においても $yf(p^*)x$ とはならない。x や y は任意であるから，以上の議論は任意の選択肢の組について独裁者が存在することを意味する。異なる選択肢の組に異なる独裁者がいることはないのでただ一人の独裁者が存在する。これを以下に示す。

(i) 個人 k が x と y について（y より x を好む方向での）独裁者であり，別の個人 l が x と $z(\neq x,y)$ について（x より z を好む方向での）独裁者であるとする。あるプロフィール p においてこれら 3 つ以外の任意の選択肢を w として $xP_kyP_kzP_kw$，$yP_lzP_lxP_lw$ でかつ他のすべての人々が w より z を好み，また z より y を好むならば，独裁者についての仮定と PAR によって $w\neg f(p)z$，$z\neg f(p)y$，$x\neg f(p)z$，$y\neg f(p)x$ となるが，これは BA（最良の選択肢の存在）に反する。したがって k は x と任意の $z\neq x,y$ について（x より z を好む方向での）独裁者でなければならない。

(ii) 同様に別の個人 l が y と $z(\neq x,y)$ について（z より y を好む方向での）独裁者であるとする。あるプロフィール p においてこれら 3 つ以外の任意の選択肢を w として $zP_kxP_kyP_kw$，$yP_lzP_lxP_lw$ でかつ他のすべての人々が w より x を好み，また x より z を好むならば，独裁者についての仮定と PAR によって $w\neg f(p)x$，$x\neg f(p)z$，$z\neg f(p)y$，$y\neg f(p)x$ となるが，これは BA に反する。したがって k は y と任意の $z\neq x,y$ について（z より y を好む方向での）独裁者でなければならない。

(iii) 個人 k が x と y について（y より x を好む方向での）独裁者であることを $x\Rightarrow y$ と表すと，上の議論から

$$x\Rightarrow y \text{ ならば } z\neq x,y \text{ について } z\Rightarrow x,\ y\Rightarrow z$$

が証明されている。同様にして

$$w\neq x,z \text{ について } w\Rightarrow z,\ w\neq y,z \text{ について } z\Rightarrow w$$

が示される。z，w は任意であるから残るは $y\Rightarrow x$ のみであるが，これは $z\Rightarrow w$ をもとに同様に考えれば証明される。

☺

補題 7.2 よりこの定理がアローの一般可能性定理を意味することがわかる。また戦略的操作不可能性はパレート効率性を意味する。以下に証明を与える。

すべての人々が y より x を好むようなプロフィールを p，x が社会的選択関数によって選ばれるようなプロフィールを p' とする。さらに z を x，y 以外の任意の選択肢として，別のプロフィール p'' においてすべての人々が z より y を，y より x を好んでいると仮定する。p' においてある 1 人の人（i とする）の選好が P_i' から P_i'' に変化したときに x が選ばれないとすると，個人 i は真の選好が P_i'' であるときに P_i' を表明することによって最も好

む x を実現することができるので戦略的に操作可能となる。したがって x が選ばれる。同じ論理はすべての人々に当てはまるので p'' において x が選ばれる。p'' から p へ向けて 1 人 1 人選好が変化して行くとしよう。そのとき誰か（個人 i とする）の選好の変化によって選ばれる選択肢が x から y に直接変化すれば真の選好が P_i であるときに P_i'' を表明することによってよりよい状態が実現できるからそのようにはならない。一方，誰かの選好の変化によって選ばれる選択肢が x，y 以外の何か（z で表す）になり，さらに別の誰か（個人 j とする）の選好の変化によって y に変るとすると p'' において z より y を好んでいるので真の選好が P_j'' であるときに P_j を表明することによってよりよい状態が実現できるからそのようにはならない。よって p において y は選ばれない。

したがってこの定理はギバード・サタースウェイトの定理をも含んでいる。

8 代数トポロジーと社会的選択理論 (Chichilnisky(*Journal of Mathematical Economics*, 1982))

本節では Chichilnisky によって始められた代数トポロジー (algebraic topology) を用いた社会的選択理論の研究の一端を紹介しよう[*37]。2 人以上 k 人の個人からなる社会において選択肢の集合がユークリッド空間の部分集合 $X \subset \mathbb{R}^n$（$n \geqq 2$，あるいは $\mathbb{R}^n$ そのもの）であるとして，X に関する個人の選好から社会的な選好を導く社会的選択ルール（社会的厚生関数 (social welfare function)）を考える。ある個人の選好は X 上で定義された無差別曲面によって表され，X のある点 x における無差別曲面に垂直なベクトルを $p(x)$ とする。p の符号はその個人の選好が正となる（効用が増大する）方向を正として定められる。序数的な効用を考えるので選好の方向性だけが問題でありその強さは関係ないから $p(x)$ は大きさが 1 のベクトルであると仮定することができる。各点 x において可能な $p(x)$ の集合を P で表す。あらゆる方向の選好が可能であれば P は半径 1 の $n-1$ 次元球面 S^{n-1} をなす。社会的厚生関数は X の各点 x において k 人の人々の選好の組み合わせから社会の選好を導き出すものであり

$$F : (S^{n-1})^k \to S^{n-1}$$

と表される。$P^k = (S^{n-1})^k$ の要素，すなわち選好のプロフィールを $\mathbf{p}$ で表す。この節と次節では社会的厚生関数は人々の選好について連続であることを求める。この連続性はある人の選好がわずかに変ったときに人々の選好をもとに作られる社会的な選好が大きく変ってはならないということを意味するものである。

関数のホモトピックな関係についての次の結果を示す。2 つの関数 f と g がホモトピックであるとは，ある空間の中で f をずるずると（連続的に）変形して g に作り変えることができるということを意味する。f から g へ向けて連続的に変化する関数を f と g の間のホモトピーと呼ぶ。

[*37] 本節は G. Chichilnisky, “The topological equivalence of the Pareto condition and the existence of a dictator”, *Journal of Mathematical Economics*, vol. 9, pp. 223-234, 1982. にもとづくが，L. Lauwers, “Topological social choice”, *Mathematical Social Sciences*, vol. 40, pp. 1-39, 2000. や P. Mehta, “Topological methods in social choice: an overview”, *Social Choice and Welfare*, vol. 14, pp. 233-243, 1997. などの解説を用いてアレンジされている。

補題 8.1. S^{n-1} から S^{n-1} への 2 つの関数 f，g について，すべての $x \in S^{n-1}$ について $f(x) \neq -g(x)$ ならば f と g はホモトピックである。

証明. 関数

$$H(x,t):\ S^{n-1} \times I \longrightarrow S^{n-1}:\ (x,t) \longrightarrow \frac{(1-t)f(x)+tg(x)}{|(1-t)f(x)+tg(x)|}$$

を考えると，これは f と g の間のホモトピーである（I は閉区間 $[0,1]$ を表す）。

$(1-t)f(x)+tg(x)/|(1-t)f(x)+tg(x)|$ が表す点と原点との距離（あるいはベクトルの大きさ）は $|(1-t)f(x)+tg(x)| \neq 0$ である限り常に 1 に等しい。また $f(x) \neq -g(x)$ であれば $f(x)$ と $g(x)$ が逆方向のベクトルになることはないので $|(1-t)f(x)+tg(x)| = 0$ とはならない。一方ある x について $f(x) = -g(x)$ ならば $t = 1/2$ のとき $|(1-t)f(x)+tg(x)| = 0$ となる。

☺

あるプロフィール $\bar{\mathbf{p}} \in (S^{n-1})^k$ のもとで以下のような包含写像を考える。

(1). $i_l:\ S^{n-1} \longrightarrow (S^{n-1})^k:\ p \longrightarrow (\bar{\mathbf{p}}_{-l}, p)$
$\bar{\mathbf{p}}_{-l}$ はプロフィール $\bar{\mathbf{p}}$ における個人 $l(1 \le l \le k)$ 以外の人々の選好の組み合わせを表す。この写像は，$\bar{\mathbf{p}}_{-l}$ を固定して個人 l の選好 p を 1 つのプロフィール $(\bar{\mathbf{p}}_{-l}, p)$ に対応させるものである。各 l についてこのような包含写像 i_l を定義する。p は S^{n-1} 全体で変わり得るが，$(S^{n-1})^k$ において個人 l 以外の選好は変化しない。ここでホモロジー群というものを考える*38。これは各図形に対して次元ごとに定義されるものであるが $n-1$ 次元球面のホモロジー群は整数の集合 $\mathbb{Z}$ と群として同じ形（同型）になっている。群とは足し算または掛け算が定義され，それが結合法則を満たすような集合であり，整数の集合や実数の集合なども群である*39。この包含写像によって導かれる $n-1$ 次元ホモロジー群の準同型を $i_{l*}:\ H_{n-1}(S^{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(S^{n-1})^k$ とすると $i_{l*}(h) = (0,\cdots,h,\cdots,0)$（$l$ 番目のみ h で他は 0，$h \in \mathbb{Z}$）となる。準同型とは群の要素に関する演算で，それを φ で表すと $\varphi(x+y) = \varphi(x)+\varphi(y)$ を満たす。

(2). $\Delta:\ S^{n-1} \longrightarrow (S^{n-1})^k:\ p \longrightarrow (p,\cdots,p)$（すべての成分が p に等しい）
p は S^{n-1} 全体で変わり，それに対応して $(S^{n-1})^k$ においてすべての成分が p と同じように変化するから，この包含写像によって導かれるホモロジー群の準同型を Δ_* とすると $\Delta_*(h) = (h,\cdots,h)$（すべての成分が h）である。これらは準同型であるから次の式が成り立つ。

$$\Delta_* = i_{1*} + i_{2*} + \cdots + i_{k*} \tag{8.1}$$

次に社会的厚生関数 F と上記の包含写像との合成関数を考える。

*38 Chichilnisky は「ホモロジー群」ではなく「ホモトピー群」を用いているが，球面とその積空間についてはどちらも同じである。

*39 群とホモロジー群，準同型についてはとりあえずは拙著「代数トポロジーと社会的選択理論（前編）」（同志社大学経済学部ワーキング・ペーパー No. 19）を参照していただきたい。なおこれには本節の内容もほぼ含まれている。

(1). $F\circ i_l$(各 l について)$:\ S^{n-1}\longrightarrow S^{n-1}:\ p\longrightarrow F(\bar{\mathbf{p}}_{-l},p)$
(2). $F\circ\Delta:\ S^{n-1}\longrightarrow S^{n-1}:\ p\longrightarrow F(p,\cdots,p)$

これらは球面から球面への連続な関数であるから写像度が定義できる。

写像度　S^n を n 次元球面とすると $H_n(S^n)\cong\mathbb{Z}$ である。連続写像 $f:\ S^n\to S^n$ によって導かれる準同型

$$f_*:\ H_n(S^n)\to H_n(S^n)$$

について $H_n(S^n)$ の生成元を x とすると(x に適当な整数をかけて $H_n(S^n)$ の要素が作られるもの，ここでは 1 または -1)f_* は準同型であるから任意の $y=nx(\in H_n(S^n):\ n\in\mathbb{Z})$ に対して $f_*(y)=nf_*(x)$ であり，$f_*(x)=\gamma(f)x$ とすれば $f_*(y)=n\gamma(f)x=\gamma(f)y$ となる。$H_n(S^n)\cong\mathbb{Z}$ なので $\gamma(f)$ は整数である。この整数 $\gamma(f)$ を f の写像度と呼ぶ。写像度について次の事実が成り立つ。f の写像度を $\deg(f)$ で表す。

(1). 2 つの連続写像 f，g がホモトピックであればそれらによって導かれる準同型 f_*，g_* は等しい($f_*=g_*$)ので写像度は等しい，すなわち $\gamma(f)=\gamma(g)$。
(2). 恒等写像 f によって導かれる準同型はホモロジー群の恒等写像である($f_*(x)=x$)から恒等写像の写像度は 1 に等しい。
(3). 定値写像(すべての点を同一の点に移す写像)によって導かれる準同型は 0 なので定値写像の写像度は 0 に等しい。また，全射ではない連続写像の像は 1 点とホモトピー同値であるから[*40]，そのような写像の写像度も 0 である。
(4). f，g を連続写像，$h=g\circ f$ をそれらの合成写像とすると $h_*=g_*\circ f_*$ であるから $\gamma(h)=\gamma(f)\gamma(g)$ である。

$\bar{\mathbf{p}}$ とは異なるプロフィール $\bar{\mathbf{p}}'$ に対応した $p\longrightarrow F(\bar{\mathbf{p}}'_{-l},p)$ は $p\longrightarrow F(\bar{\mathbf{p}}_{-l},p)$ とホモトピックであるから $F\circ i_l$ の写像度は個人 l 以外の人々の選好には依存しない。

$\bar{\mathbf{p}}_{-l}$ と $\bar{\mathbf{p}}'_{-l}$ の各個人(個人 l 以外)の成分を p_j，p'_j とし，各個人について $-p_j$，$-p'_j$ とは異なる選好 $\hat{p}_j\in S^{n-1}$ をとる。

$$0\le t<\frac{1}{2}\text{のとき } p''_j=\frac{(1-2t)p_j+2t\hat{p}_j}{|(1-2t)p_j+2t\hat{p}_j|}$$
$$\frac{1}{2}\le t\le 1\text{ のとき } p''_j=\frac{(2t-1)p'_j+(2-2t)\hat{p}_j}{|(2t-1)p'_j+(2-2t)\hat{p}_j|}$$

とおけば $p''_j\in S^{n-1}$ である。この p''_j の組を $\bar{\mathbf{p}}''_{-l}$ とし，個人 l の選好を p として

$$H(p,t)=F(\bar{\mathbf{p}}''_{-l},p)$$

を考えるとこれは $F(\bar{\mathbf{p}}_{-l},p)$ と $F(\bar{\mathbf{p}}'_{-l},p)$ との間のホモトピーである。

さらに写像度について次の事実を示すことができる。

[*40] 像は S^n から少なくとも 1 点を取り除いたものであり，S^n 上で 1 点に連続的に収縮させられる。

補題 8.2. $F\circ i_l$（各 l について）と $F\circ\Delta$ の写像度に関して次の式が成り立つ。

$$\deg(F\circ\Delta)=\deg(F\circ i_1)+\deg(F\circ i_2)+\cdots+\deg(F\circ i_k) \tag{8.2}$$

証明. 合成関数によって導かれるホモロジー群の関係によって $(F\circ\Delta)_*=F_*\circ\Delta_*$ および $(F\circ i_l)_*=F_*\circ i_{l*}$ が成り立つ。(8.1) より

$$\begin{aligned}(F\circ\Delta)_* &=F_*\circ\Delta_*=F_*\circ(i_{1*}+i_{2*}+\cdots+i_{k*})=F_*\circ i_{1*}+F_*\circ i_{2*}+\cdots+F_*\circ i_{k*}\\ &=(F\circ i_1)_*+(F\circ i_2)_*+\cdots+(F\circ i_k)_*\end{aligned}$$

となる。したがって

$$\deg(F\circ\Delta)=\deg(F\circ i_1)+\deg(F\circ i_2)+\cdots+\deg(F\circ i_k)$$

が得られる。 ☺

以上の準備のもとでパレート原理を満たす社会的厚生関数についての Chichilnisky の定理を示そう。次の 2 つの条件をおく。

パレート原理 (Pareto principle)　X に含まれるある任意の 2 つの選択肢 x,y について，全員が y より x を好むならば社会的にも y より x が好まれる。

弱い正の反応性 (Weak positive association condition, WPAC)　あるプロフィール $\mathbf{p}$ において，ある個人 l について $F(\mathbf{p})=-p_l$ ならば，$F(\bar{\mathbf{p}}_{-l},p_l)\neq p_l$ である。ただし，$\bar{\mathbf{p}}=(-p_l,\cdots,-p_l)$(すべてが $-p_l$)。

この条件は，あるプロフィールにおいて社会的厚生関数が個人 l の選好とは逆の選好を選んでいるとき，個人 l 以外の人々の選好がその逆の選好になったときに社会的厚生関数が個人 l の選好を選ばないということを意味する。

まずパレート原理の持つ意味を考えてみる。

補題 8.3. 社会的厚生関数がパレート原理を満たすものとする。個人 l が選好 $-p$ を持ち，他のすべての人々が選好 p を持っているとき社会的厚生関数は p か $-p$ のいずれかを選ぶ。

証明. $x\in X$ において個人 l 以外のすべての人々が選好 p を持ち，個人 l が選好 $p'(\neq -p)$ を持っているとき，パレート原理を満たす社会的厚生関数が選ぶ選好を p^* とする。各選好が適当な効用関数で表現されるものとすれば p や p' などはその勾配を表している。パレート原理は p と p' が表す効用がともに増加する方向に社会的選好 p^* が表す効用も増加することを要求する。言い換えれば S^{n-1} のベクトルを v として内積 $p\cdot v$，$p'\cdot v$ がともに正となるすべての v について内積 $p^*\cdot v$ も正となることが求められる。

ここで p' が $-p$ に近づいて行くとすると $p\cdot v>0$，$p'\cdot v>0$ を満たす v は p と p'，$-p$ を通る円（大円）の片方の半円の中点に近づき，p^* はその片方の半円に含まれる点に近づいて行く。一方 p' を上記のものとは逆方向にとって $-p$ に近づけて行くとすると，その極限において p^* は p と p'，$-p$ を通る大円のもう一方の半円に含まれる点に近づいて行く。社会的厚生関数の連続性によってこれら両者は一致しなければならないので p^* は p または $-p$ でなければならない。

$p' = -p$ のときには p と $-p$ の両方と正の内積を持つベクトルはないのでパレート原理によって p^* は制約を受けない。すなわち S^{n-1} 上のすべてのベクトルがパレート原理を満たす。しかし，極限において p' が $-p$ に近づいて行くときには p^* は p と $-p$ を結ぶ 2 つの半円のそれぞれに含まれる点に近づいていくので，社会的厚生関数の連続性によって p または $-p$ とならなければならない。

☺

さらにパレート原理によって次のことがわかる。$\bar{\mathbf{p}} = (p, p, \cdots, p)$ とする。

性質 1　すべての $p'(\neq -p)$ について $F(\bar{\mathbf{p}}_{-l}, p') \neq -p'$

$F(\bar{\mathbf{p}}_{-l}, p')$ は p，p' と正の内積を持つベクトルとの間で正の内積を持たなければならないが $-p'$ はその条件を満たさない。

性質 2　すべての $p'(\neq -p)$ について $F(\bar{\mathbf{p}}_{-l}, p') \neq -p$

同様に $F(\bar{\mathbf{p}}_{-l}, p')$ は p，p' と正の内積を持つベクトルとの間で正の内積を持たなければならないが $-p$ はその条件を満たさない。

これらの結果にもとづいて次の補題を示す。

補題 8.4. 社会的厚生関数がパレート原理を満たすものとする。そのとき

(1). 各個人に対応した $F \circ i_l$ の写像度は 1 か 0 である。

(2). 1 に等しい写像度を持つ $F \circ i_l$ が 1 つあり，1 つだけである。

証明. (1). $F \circ i_l$ の写像度は個人 l 以外の人々の選好に依存しないので $\bar{\mathbf{p}} = (p, p, \cdots, p)$（すべての人々の選好が p に等しい）をとって $F \circ i_l : p' \longrightarrow F(\bar{\mathbf{p}}_{-l}, p')$ 考える。補題 8.3 より $F(\bar{\mathbf{p}}_{-l}, -p)$ は p または $-p$ に等しい。$F \circ i_l(-p) = -p$ のときは上記の性質 1 によって，すべての p' について $F \circ i_l(p') \neq -p'$ が成り立つので補題 8.1 により $F \circ i_l$ は恒等写像にホモトピックであるからその写像度は 1 に等しい。

一方 $F \circ i_l(-p) = p$ のときは上記の性質 2 によって，すべての p' について $F \circ i_l(p') \neq -p$ が成り立つので補題 8.1 により $F \circ i_l$ は定値写像（$p' \longrightarrow p$）にホモトピックであるから写像度は 0 に等しい。

(2). パレート原理は全員一致性 (unanimity , $F(\bar{\mathbf{p}}) = p$) を意味するので $F \circ \Delta$ の写像度は 1 に等しい。したがって (8.2) により唯 1 人の個人に関する $F \circ i_l$ の写像度だけが 1 に等しく，その他の個人に関する $F \circ i_l$ の写像度は 0 である。

☺

以上の議論から次の結論が導かれる。

定理 8.1. 連続性，パレート原理および弱い正の反応性を満たすいかなる社会的厚生関数も独裁的な社会的厚生関数にホモトピックである。

証明. プロフィールを $\mathbf{p}$ で表す。個人 d（その選好は p_d）を独裁者とする独裁的な社会的厚生関数 $\Pi_d(\mathbf{p})$ は常に $\Pi_d(\mathbf{p}) = p_d$ を満たす。したがって $\Pi_d(\mathbf{p}) \circ i_d$ は恒等写像となりその写像度は 1 に等しい。

各個人 l について次の条件を考える。

$$\text{すべての } \mathbf{p} \in (S^{n-1})^k \text{ について } F(\mathbf{p}) \neq -p_l (= -\Pi_l(\mathbf{p})), \tag{8.3}$$

（p_l は $\mathbf{p}$ における個人 l の選好を表す）

もしこの条件が個人 l について成り立つとすると補題 8.1 によって F と Π_l（独裁的な社会的厚生関数）はホモトピックである。したがって $F \circ i_l$ の写像度は 1 である。

一方，あるプロフィールにおいて $F(\mathbf{p}) = -p_l$ であるとすると，性質 2 と弱い正の反応性（$p' = p_l$ のとき）によって $\bar{\mathbf{p}} = (-p_l, -p_l, \cdots, -p_l)$ に対して

$$F \circ i_l : p' \longrightarrow F(\bar{\mathbf{p}}_{-l}, p')$$

の値が p_l となることはない。すなわち $F \circ i_l$ は全射ではないのでその写像度は 0 である。

(8.3) の条件が 2 人以上の個人に成り立つことはないので社会的厚生関数が独裁的な社会的厚生関数にホモトピックであることが示された。 ☺

(8.3) を満たす個人を d とする。パレート原理により $\bar{\mathbf{p}} = \{-p, -p, \cdots, -p\}$ とすると $F(\bar{\mathbf{p}}_{-d}, p)$ は p または $-p$ に等しいが，(8.3) よりこの個人 d については $F(\bar{\mathbf{p}}_{-d}, p) = p$ でなければならない。個人 d は人々が対立するような選好を持つ場合には独裁者となる。人々の選好は x について連続であり，また社会的厚生関数 F は人々の選好について連続であるから，F は x についても連続となる。であれば x がわずかに変化したときに $F(\bar{\mathbf{p}}_{-d}, p) = p$ から $F(\bar{\mathbf{p}}_{-d}, p) = -p$ に変化することはないので個人 d はあらゆる x において（対立する選好についての）独裁者である。

これに関連した別の定理を示す[*41]。

定理 8.2. 連続性，パレート原理および次に定義する「決定的多数決性」の条件を満たす社会的厚生関数は存在しない。

決定的多数決性 (decisive majority)　全体の人々の集合が 2 つに分けられ，一方の人々は p という選好を共通に持ち，残りの人々が逆の選好 $-p$ を持っているとき，社会的厚生関数は人数の多い方の選好と一致する。

この条件は全員一致性をより強くしたものになっているとともに多数決を一般化した形になっている。全員一致性は全員の選好が p であるときに社会的選好が p になることを要求するだけであるが，この条件は選好が対立する場合も含めて人数が多い選好と社会的選好が一致することを求める[*42]。また通常の多数決では任意の 2 つの選択肢（x，y とする）に関する選好について y より x を好む人の数が逆の選好を持つ人の数より多ければ社会的

[*41] この定理は G. Chichilnisky, "Structural instability of decisive majority rules", *Journal of Mathematical Economics*, vol. 9, pp. 207-221, 1982. による。

[*42] パレート原理も全員一致性を強くしたものであるが，決定的多数決性とは異なる方向に強くしているので，パレート原理と決定的多数決性とはどちらがどちらを意味するということはない。

にも y より x が好まれることが求められるが，決定的多数決性はそこまでは要求しないので通常の多数決よりも弱い条件である。通常の多数決は決定的多数決性を意味する。

証明. 各個人 l について，その個人の選好のみが p で他の人々の選好が $-p$ であるようなプロフィール $(\bar{\mathbf{p}}_{-l}, p)$ をとると決定的多数決性により $F(\bar{\mathbf{p}}_{-l}, p) = -p$ でなければならない。そのとき上記の性質 2 によって $F \circ i_l$ の写像度は 0 である（p は実現しない）。すべての人々についてこれが成り立つから $\sum_{l=1}^{n} \deg(F \circ i_l) = 0$ が得られる。一方パレート原理によって $\deg(F \circ \Delta) = 1$ であるが，そうすると

$$\sum_{l=1}^{n} \deg(F \circ i_l) \neq \deg(F \circ \Delta)$$

となり (8.2) と矛盾する。したがって連続性，パレート原理，決定的多数決性を満たす社会的厚生関数は存在しない。 ☺

9 社会的選択関数の implementation (Maskin (*Review of Economic Studies*, 1999))

ギバード・サタースウェイトの定理や Ching and Zhou(2002) の定理などにより戦略的に操作不可能な社会的選択関数や社会的選択対応には独裁者が存在することがわかっている。戦略的に操作不可能とは人々が自分の真の選好とは異なる選好を表明して利益を得ることがないということであるが，戦略的に操作不可能であるためには他の人々がどのような選好を表明していても真の選好を表明することが各個人にとって最適でなければならない。ゲーム理論の言葉で言うと真の選好を表明するという戦略が「支配戦略 (dominant strategy)」になっていなければならない。それでは条件として強すぎるかもしれない。そこで社会的選択ルールが実現する結果をゲームとして表現するような仕組みを作り，社会的選択ルールの結果がそのゲームの（支配戦略均衡ではなく）ナッシュ均衡として実現されるために必要，あるいは十分な条件についての研究が盛んに行われている。この節ではその中でも代表的な Maskin による著名な研究を紹介したい[*43]。

人々の選好は無差別な関係を含む一般的なものであるとする。個人 i の選好は R_i，R'_i などで（厳密な選好は P_i，P'_i などで）表され，選好のプロフィールは $\mathbf{p}$，$\mathbf{p}'$ などで表す。また社会的選択ルールとしては人々の選好に対応して 1 つまたは複数の選択肢を選ぶ社会的選択対応 (social choice correspondence)f を考える。プロフィール $\mathbf{p}$ における社会的選択対応の値（選ばれる選択肢の「集合」）を $f(\mathbf{p})$ と書く。この $f(\mathbf{p})$ に含まれる選択肢をナッシュ均衡として実現するようなゲームを考えよう。そのゲームにおける個人 i の純粋戦略を $s_i \in S_i$（S_i は個人 i の純粋戦略の集合），すべての人々の戦略の組を $\mathbf{s}$ としてその戦略の組が選ばれたときのゲームの結果を $g(\mathbf{s})$ と書く。$g(\mathbf{s})$ は選択肢の 1 つである。人々が混合戦略を選ぶときには，個人 i の戦略を μ_i，すべての人々の戦略の組を $\boldsymbol{\mu}$ として確率的なゲームの結果を $g(\boldsymbol{\mu})$ と書く。g を「ゲーム形式 (game

[*43] 本節は E. Maskin, "Nash equilibrium and welfare optimality", *Review of Economic Studies*, vol. 66, pp. 23-38, 1999. にもとづく。

form)」と呼ぶ。次の条件が成り立つとき f が g によって「実装 (implement)」されると言う（「遂行」されるとも言う）。

すべてのプロフィール $\mathbf{p}$ において，すべての選択肢 $a \in f(\mathbf{p})$ について $g(\mathbf{s}) = a$ となるような戦略の組 $\mathbf{s}$ があり，かつすべての個人 i について $g(\mathbf{s}) R_i g(s'_i, \mathbf{s}_{-i})$ が成り立つ。すなわち，自分だけが $\mathbf{s}$ とは異なる戦略 s'_i を選んでも，戦略の組が $\mathbf{s}$ であるときに実現する選択肢よりも好ましい選択肢を実現することはできない（$\mathbf{s}_{-i}$ は個人 i 以外の人々の戦略の組を表す）。　(9.1)

さらに，プレイヤーが混合戦略を用いる場合には

すべてのプロフィール $\mathbf{p}$ において，ナッシュ均衡をなす混合戦略の組 $\boldsymbol{\mu}$ に含まれる純粋戦略の組 $\mathbf{s}$ によって実現されるすべての状態において $g(\mathbf{s}) \in f(\mathbf{p})$ が成り立つ。　(9.2)

両方の条件が成り立たなければならない。(9.1) は $f(\mathbf{p})$ に含まれるすべての選択肢が純粋戦略のナッシュ均衡として実現しなければならないという条件であるが，混合戦略のナッシュ均衡を考える場合には実際にどのような状態が実現するかはわからない。したがって混合戦略の組によって実現する可能性のあるすべての状態（それが純粋戦略によるナッシュ均衡であるとは限らない）において選ばれる選択肢が $f(\mathbf{p})$ に含まれていなければならない，という条件を課すのが (9.2) である。f が選ぶ選択肢のすべてがゲームの純粋戦略によるナッシュ均衡として実現するとともに，ゲームのナッシュ均衡をなす混合戦略の組に含まれる純粋戦略の組によって実現される選択肢は f が選ぶ選択肢でなければならない。

次にこの節のモデルにおけるパレート原理と独裁者を定義する。

パレート原理 (Pareto property（Maskin(1999) の表現による）)　プロフィール $\mathbf{p}$ においてすべての人々が選択肢 b より a を好むならば $b \notin f(\mathbf{p})$ である。

独裁者　『すべてのプロフィール $\mathbf{p}$ において，すべての $a \in f(\mathbf{p})$ について a は個人 i が最も好む選択肢の 1 つであり，また個人 i が最も好む選択肢はすべて $f(\mathbf{p})$ に含まれる』が成り立つとき個人 i は f の独裁者である。

社会的選択対応はこのパレート原理を満たすことが望ましく，また独裁者が存在しないことが求められる。まず人々（ゲーム理論の用語にならってプレイヤーと呼ぶ）が 2 人のケースについては次の定理が示される。

定理 9.1. 社会的選択対応 f がパレート原理を満たし，プレイヤーの数が 2 人ならば，f は独裁者が存在する場合以外にはいかなるゲーム形式によっても実装できない。

証明.　(1). f に独裁者が存在すれば実装可能なのは明らかである。2 人のプレイヤーを 1，2 とする。各プレイヤーがそれぞれ 1 つの選択肢を戦略として選び，常にプレイヤー 1（あるいは 2）の選んだ選択肢がゲームの結果として実現するようなゲームを作れば，そのプレイヤーが最も好む選択肢の 1 つを選ぶことになるので，独裁的な社会的選択対応が選ぶ選択肢のすべてをそのゲームの純粋戦略によるナッシュ均衡において実現させることができ，かつそのような選択肢しかナッシュ均衡におけるゲームの結果としては実現しない。

(2). あるゲーム形式 g がある社会的選択対応 f を実装するとする。プレイヤー 2 の戦略 s_2^* について次のような集合を定義する。

$$T_1(s_2^*) = \{a \in A|\ すべての\ s_1 について\ g(s_1, s_2^*) \neq a\}$$

同じようにプレイヤー 1 の戦略 s_1^* について $T_2(s_1^*)$ を定義する。$T_1(s_2^*)$ はプレイヤー 2 の戦略 s_2^* が与えられたときプレイヤー 1 がどのように戦略を選んでも実現できない選択肢の集合である。$T_2(s_1^*)$ も同様に解釈できる。以下の 2 つの補題を通して定理を証明する。

補題 9.1. 任意の戦略の組 $(s_1,\ s_2)$ について $T_1(s_2) \cap T_2(s_1) = \emptyset$ である。

証明. ある戦略の組 $(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$ について $a \in T_1(\bar{s}_2) \cap T_2(\bar{s}_1)$ であると仮定する。$b = g(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$ とすると $b \neq a$ である。a，b 以外の任意の選択肢 c について 2 人とも aP_ibP_ic であるようなプロフィールを $\mathbf{p}$ とする。a は実現せず，2 人とも a 以外の選択肢の中では b を最も好んでいるので $g(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$ がプロフィール $\mathbf{p}$ におけるナッシュ均衡でなければならない[*44]。しかしパレート原理によって b は f によって選ばれないので矛盾が生じる。 ☺

補題 9.2. 任意の選択肢 a について，$a \notin \bigcup_{s_2 \in S_2} T_1(s_2)$ ならば，すべての $s_2 \in S_2$ について $g(\hat{s}_1, s_2) = a$ となるような $\hat{s}_1$ が存在する。同様に $a \notin \bigcup_{s_1 \in S_1} T_2(s_1)$ ならば，すべての $s_1 \in S_1$ について $g(s_1, \hat{s}_2) = a$ となるような $\hat{s}_2$ が存在する。

証明. プレイヤー 1 の戦略 $\hat{s}_1$ について証明すれば十分である。$a \notin \bigcup_{s_2 \in S_2} T_1(s_2)$ とする。プレイヤー 1 が a を唯一最も好み，プレイヤー 2 が a を唯一最も嫌っているようなプロフィール $\mathbf{p}$ をとり，戦略の組 $(\hat{s}_1, \hat{s}_2)$ が $\mathbf{p}$ におけるゲームのナッシュ均衡であるとする。$a \notin T_1(\hat{s}_2)$ であるから $g(\tilde{s}_1, \hat{s}_2) = a$ となるような $\tilde{s}_1 \in S_1$ がある。$(\hat{s}_1, \hat{s}_2)$ がナッシュ均衡であり，プレイヤー 1 が a を最も好んでいるので $g(\hat{s}_1, \hat{s}_2) = a$ でなければならない（a は実現可能である）。$g(\hat{s}_1, s_2) = b \neq a$ となるような戦略 s_2 と b が存在するとするとプレイヤー 2 が a を最も嫌っているので $(\hat{s}_1, \hat{s}_2)$ はナッシュ均衡ではありえない。したがってすべての $s_2 \in S_2$ について $g(\hat{s}_1, s_2) = a$ である。 ☺

定理の証明を続ける。補題 9.1 によりある $a \in A$ がいずれかの $T_1(s_2)$ に含まれていれば，どの $T_2(s_1)$ にも含まれない。その逆も言える。したがって任意の $a \in A$ は $a \notin \bigcup_{s_2 \in S_2} T_1(s_2)$ または $a \notin \bigcup_{s_1 \in S_1} T_2(s_1)$ を満たす。$b \neq a (b \in A)$ で，a は $a \notin \bigcup_{s_2 \in S_2} T_1(s_2)$ を b は $b \notin \bigcup_{s_1 \in S_1} T_2(s_1)$ を満たすような (a, b) が存在すると仮定する。すると補題 9.2 により，すべての $s_2 \in S_2$ に対して $g(\hat{s}_1, s_2) = a$ となる $\hat{s}_1$，およびすべての $s_1 \in S_1$ に対して $g(s_1, \hat{s}_2) = b$ となる $\hat{s}_2$ が存在する。そのとき $g(\hat{s}_1, \hat{s}_2) = a$ かつ $g(\hat{s}_1, \hat{s}_2) = b$ でなければならないが，それはあり得ない。したがってすべての $a \in A$ について $a \notin \bigcup_{s_2 \in S_2} T_1(s_2)$ であるか $a \notin \bigcup_{s_1 \in S_1} T_2(s_1)$ であるかのいずれかである。補題 9.2 によって前者の場合はプレイヤー 1 が独裁者であり，後者の場合はプレイヤー 2 が独裁者である。

☺

[*44] 各プレイヤーが単独で戦略を変えても a が実現することはない。

人数が 3 人以上になると定理 9.1 の結論は成り立たない。次の例が示すように実装可能で独裁者を持たない社会的選択対応が存在する。

■3 人以上のケースの例　プレイヤーの数を n 人とし，選択肢の集合を $A=\{a_1,a_2,\dots,a_m\}$，各プレイヤーの戦略の集合 S_i を $S_1=\{2,3,\dots,n\}$，$S_2=S_3=A$ と定義する。プレイヤー 1 は自分以外のいずれかのプレイヤーを指名し，他のプレイヤーはそれぞれ 1 つの選択肢を選ぶというのが戦略の組である。プレイヤー 1 が指名したプレイヤーを s_1 と表す。ゲーム形式 g の結果実現する選択肢は，プレイヤー s_1 が選ぶ選択肢であるとする。このゲーム形式によって次のような社会的選択対応が実装される。

$$f^{KM}(\mathbf{p})=\{a|\text{プレイヤー 2 から } n \text{ までの内に } a \text{ が最も好ましい選択肢（の 1 つ）となっているようなプレイヤーがいる}\}$$

この社会的選択対応は “king-maker mechanism” と呼ばれる。これが g によって実装可能であることを確認してみよう。

(1). $a\in f^{KM}(\mathbf{p})$ であれば，プレイヤー 2 から n までの誰かにとって a は最も好ましい選択肢（の 1 つ）となっている。その 1 人を j としよう。そのとき $(j,a,a,\dots,a)$ という戦略の組はナッシュ均衡であり，また $g(j,a,a,\dots,a)=a$ である。プレイヤー 1 が指名するプレイヤーを変えても結果は変らない。また j 以外のプレイヤーが戦略を変えても結果は変らず，j にとっては a が最も好ましい選択肢の 1 つであるからこの戦略の組はナッシュ均衡になっている。同じようにして任意の $a\in f^{KM}(\mathbf{p})$ が g のナッシュ均衡として実現される。

(2). $(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n)$ がプロフィール $\mathbf{p}$ において g の混合戦略によるナッシュ均衡であるとする。μ_1 が正の確率を割り当てるプレイヤーの 1 人を j とすると j は自分が最も好む選択肢を実現する機会を正の確率で持つ。μ_j が均衡戦略であるためには μ_j において j が最も好む選択肢にのみ正の確率が与えられなければならない。そのことは各プレイヤーが選ぶ混合戦略に含まれる純粋戦略の組によって実現される状態において 2 から n までの誰かにとって最も好ましい選択肢のみが実現されるということを意味する。したがって g の混合戦略に含まれるすべての純粋戦略の組によって実現される状態において選ばれる選択肢は $f^{KM}(\mathbf{p})$ に含まれる。

一般的に社会的選択対応が実装可能であるためにはある 1 つの条件が満たされなければならない。またそれに加えてもう 1 つの条件が成り立てば実装可能であることが示される。それらは以下の条件である。

単調性 (monotonicity)　2 つのプロフィールを $\mathbf{p}$，$\mathbf{p}'$ とする。任意の選択肢 a について $a\in f(\mathbf{p})$ であり，かつ「すべてのプレイヤー i，任意の $b\neq a$ について aR_ib ならば aR'_ib」が成り立てば $a\in f(\mathbf{p}')$ である。

拒否権者の非存在 (no veto power, NVP)　任意の選択肢 a，任意のプロフィール $\mathbf{p}$ について，ある個人 i 以外のすべての人々が a 以外のあらゆる選択肢よりも a を好むかまたは（その内のいくつかと）無差別であるとき（a がそれらの人々にとって最も好ましい選択肢の 1 つ

になっている）$a\in f(\mathbf{p})$ である。これは 1 人だけが a を嫌ってもそれを排除できないという条件である。

まず次の定理を示す。この定理は単調性が実装可能性の必要条件であることを意味する。

定理 9.2. 社会的選択対応 f があるゲーム形式によって実装可能ならば f は単調性を満たす。

証明. f があるゲーム形式 g によって実装されると仮定する。あるプロフィール $\mathbf{p}$，ある選択肢 $a\in f(\mathbf{p})$ について g のナッシュ均衡 $(s_1,s_2,\dots,s_n)$ において $g(s_1,s_2,\dots,s_n)=a$ であるとする。別のプロフィール $\mathbf{p}'$ をとり次の条件を満たすとする。

$$\begin{array}{l}\text{すべてのプレイヤー } i\text{，すべての選択肢 } b \text{ について}\\ aR_ib \text{ ならば } aR'_ib \text{ である。}\end{array}\tag{9.3}$$

あるプレイヤー i の戦略 s'_i があって $g(s'_i,\mathbf{s}_{-i})P'_ia$ であるとすると（$\mathbf{s}_{-i}$ は i 以外のプレイヤーの戦略の組，この式は $\mathbf{p}'$ において i が a よりも別の戦略 s'_i によって実現する結果の方を好むことを意味する）(9.3) より $\mathbf{p}$ においても $g(s'_i,\mathbf{s}_{-i})P_ia$ でなければならない（$aR_ig(s'_i,\mathbf{s}_{-i})$ ならば $aR'_ig(s'_i,\mathbf{s}_{-i})$ である）。しかしこれは $(s_1,s_2,\dots,s_n)$ が $\mathbf{p}$ においてナッシュ均衡であるということと矛盾する。したがって $\mathbf{p}'$ においてプレイヤー i にとって s_i とは異なる戦略を選んで a 以外の（a よりも厳密に好む）選択肢を実現させることがナッシュ均衡となることはなく，$(s_1,s_2,\dots,s_n)$ は $\mathbf{p}'$ においてもナッシュ均衡である。よって $a\in f(\mathbf{p}')$ でなければならず単調性が成り立つ。 ☺

このように単調性は f が実装可能であるための必要条件であるがこれだけでは十分ではない。しかし単調性に加えて NVP を f に課せば実装可能となるのである。

定理 9.3. 3 人以上のプレイヤーがいるとき，f が単調性と NVP を満たせば実装可能である。

証明. この証明では純粋戦略を考える。混合戦略の場合の証明については後で解説する。

各プレイヤーの戦略の集合を次のように仮定する。

$$S_i=\mathscr{R}\times A\times\mathscr{N}$$

$\mathscr{R}$ は選好のプロフィールの集合，A は選択肢の集合，$\mathscr{N}$ は非負の整数の集合である。また次の記号を定義する。

$$L(a,R_i)=\{b|aR_ib\}$$

$L(a,R_i)$ は選好 R_i において a よりも好まれることがない選択肢の集合を表す。以下の手順で社会的選択対応 f を実装するゲーム形式を作る。

(1). あるプロフィール $\mathbf{p}$，選択肢 a，整数 m について

$$s_1=s_2=\cdots=s_n=(\mathbf{p},a,m),\ a\in f(\mathbf{p}) \text{ のとき } g(s_1,s_2,\dots,s_n)=a \text{ とする}\tag{9.4}$$

全員の戦略が一致し，かつ選んだ選択肢 a が $f(\mathbf{p})$ に含まれるならば a がゲームの結果となる。

(2). あるプレイヤー i とそれ以外のすべてのプレイヤー（j で代表させる）について $s_j = (\mathbf{p},a,m)$，$s_i = (\mathbf{p}^i,a^i,m^i) \neq (\mathbf{p},a,m)$ かつ $a \in f(\mathbf{p})$ のとき（$\mathbf{p}^i$ はプレイヤー i が選ぶ戦略としてのプロフィール）

$$g(s_1,s_2,\dots,s_n) = \begin{cases} a^i\,(a^i \in L(a,R_i)\text{ のとき}) \\ a\ (a^i \notin L(a,R_i)\text{ のとき}) \end{cases}$$

1人（プレイヤー i）を除く全員の戦略が一致していて a が $f(\mathbf{p})$ に含まれているとき，もしプレイヤー i が選んだ選択肢 a^i がそれ以外の人々が選んだ選択肢 a と比べて（他のプレイヤーが選んだプロフィールにおける）プレイヤー i 自身の選好から見て好ましくないものか，または無差別であるようなものならば a^i がゲームの結果となり，そうでなければ（a より a^i の方がプレイヤー i 自身にとってより好ましいものならば）a がゲームの結果となる。

(3). 以上2つの場合以外は

$$g(s_1,s_2,\dots,s_n) = a^{i*}$$

a^{i*} はプレイヤー i^* が選んだ選択肢であり，プレイヤー i^* は次の条件を満たすプレイヤーである。

$$i^* = \max\{i|m^i = \max_j m^j\}\ (m^j\text{はプレイヤー } j \text{ が選んだ整数の値})$$

i^* は最も大きな整数を選んだプレイヤーであるが，そのようなプレイヤーが複数いる場合にはその中で最も最後に位置するプレイヤーである（1から n までプレイヤーに順番がついている)。

このように定義されたゲーム形式が f を実装することを示す。

まず任意の $a \in f(\mathbf{p})$ について戦略の組が $s_1 = s_2 = \cdots = s_n = (\mathbf{p},a,m)$ を満たすとすると，(1) によりその戦略の組によって a が実現し，(2) によってその状態で1人のプレイヤー i が戦略を変更しても $L(a,R_i)$ に含まれる選択肢しか実現することができないので (9.4) を満たす戦略の組は $\mathbf{p}$ において（$\mathbf{p}$ が真のプロフィールであるときに）ナッシュ均衡である。したがって任意の $a \in f(\mathbf{p})$ がこのゲームのナッシュ均衡の結果として実現される。

ある a について $s_1 = s_2 = \cdots = s_n = (\mathbf{p},a,m)$ を満たす戦略の組がナッシュ均衡であって $a \in f(\mathbf{p})$ であるが真のプロフィールは $\mathbf{p}$ とは異なる $\mathbf{p}'$ であると仮定する。各プレイヤーはプロフィール $\mathbf{p}$ を戦略として選んでいる。(1) によりこのゲームの結果は a であり，またこの戦略の組が $\mathbf{p}'$ においてナッシュ均衡であるから (2) によって次の結果を得る。

$$\text{すべてのプレイヤー } i\text{，すべての } b \in L(a,R_i) \text{ について } aR'_i b \text{ である。}$$

もしそうでなければ，すなわちあるプレイヤー i，ある選択肢 $b \in L(a,R_i)$ について $bP'_i a$ であれば (2) により異なる戦略を選ぶことによって b を実現することができるからもとの戦略の組がナッシュ均衡ではなくなってしまう。この式は次のように書き直される。

$$\begin{aligned} &\text{すべてのプレイヤー } i\text{，すべての } b \in A \text{ について，} \\ &aR_i b \text{ ならば } aR'_i b \text{ である（} b \in L(a,R_i) \text{ であるから）} \end{aligned} \tag{9.5}$$

f は単調性を満たすので (9.5) は $a \in f(\mathbf{p}')$ であることを意味する。したがってナッシュ均衡の結果実現される選択肢はいずれかのプロフィール（$\mathbf{p}'$ とする）について $f(\mathbf{p}')$ に含まれている。

次にプロフィール $\mathbf{p}'$ における次のようなナッシュ均衡を考える。

「i 以外のプレイヤー（j で代表させる）について $s_j = (\mathbf{p}, a, m)$ で $s_i \neq (\mathbf{p}, a, m)$，かつ $a \in f(\mathbf{p})$。」

これは上記の (2) を満たすナッシュ均衡である。この均衡の結果を a' とする。上記の (3) によって i 以外のどのプレイヤーも十分大きな m を選べば自分が望む選択肢を実現することができる。したがってこの戦略の組がナッシュ均衡であるためには

$$\text{すべての } j \neq i,\ \text{すべての } b \in A \text{ について } a' R'_j b \text{ である。} \tag{9.6}$$

が成り立たなければならない。(9.6) と NVP により $a' \in f(\mathbf{p}')$ である。したがってナッシュ均衡の結果実現される選択肢はいずれかのプロフィール（$\mathbf{p}'$ とする）について $f(\mathbf{p}')$ に含まれている。

最後にプロフィール $\mathbf{p}'$ における上記の (3) を満たすナッシュ均衡を考える。これは次のような均衡である。

「最も大きな整数を選んだプレイヤー（複数いればその内番号が最も大きいプレイヤー）
i^* が選ぶ選択肢 a^{i^*} が実現する。」

他のプレイヤーはさらに大きな整数を選ぶことによって自分が望む選択肢を実現することができる。したがって (9.6) と同様に

$$\text{すべての } j \neq i^*,\ \text{すべての } b \in A \text{ について } a^{i^*} R'_j b \text{ である。}$$

が成り立たなければならない。これと NVP により $a^{i^*} \in f(\mathbf{p}')$ である。したがってナッシュ均衡の結果実現される選択肢はいずれかのプロフィール（$\mathbf{p}'$ とする）について $f(\mathbf{p}')$ に含まれている。 ☺

ここで次の例を紹介する。

■単調性だけでは不十分であることの例　人数が 3 人，選択肢の集合が $A = \{a, b, c\}$ であると仮定する。また人々の選好は無差別を含まない厳密なものであるとする。次のような社会的選択対応 f^* を定義する。

プロフィール $\mathbf{p}$ において，選択肢 $x \in \{a, b\}$ については「3 人ともが x より別の（共通の）選択肢を好む」ということがなく（パレート原理に反しない），プレイヤー 1 が x を最も好む場合に，またその場合にのみ $x \in f^*(\mathbf{p})$ となる。

c については「3 人ともが c より別の（共通の）選択肢を好む」ということがなく，プレイヤー 1 にとって c が最も嫌う選択肢でない場合に，またその場合にのみ $c \in f^*(\mathbf{p})$ となる。

個人の選好が厳密なものに限定されているので，$\mathbf{p}$ と $\mathbf{p}'$ との間で x または c について単調性の前提が成り立てば $x \in f^*(\mathbf{p}')$（あるいは $c \in f^*(\mathbf{p}')$）となるから単調性が満たされる。しかしプレイヤー 1 が c を最も嫌っていれば他の 2 人がそれを最も好んでいても f^* によって選ばれないの

で NVP が満たされない。この社会的選択対応は実装可能なのであろうか？それを確認するために以下の 3 つのプロフィールを考える。

$$\mathbf{p}^1:\ bP_1^1cP_1^1a,\ cP_2^1aP_1^2b,\ cP_3^1aP_3^1b$$

$$\mathbf{p}^2:\ aP_1^2bP_1^2c,\ cP_2^2bP_1^2a,\ cP_3^2aP_3^2b$$

$$\mathbf{p}^3:\ bP_1^3aP_1^3c,\ aP_2^3bP_1^3c,\ aP_3^3bP_3^3c$$

f^* の定義により

$$f^*(\mathbf{p}^1)=\{b,c\},\ f^*(\mathbf{p}^2)=\{a\},\ f^*(\mathbf{p}^3)=\{b\}$$

である。f^* が実装可能であれば，戦略の組 (s_1^1,s_2^1,s_3^1) が $\mathbf{p}^1$ におけるナッシュ均衡となり $g(s_1^1,s_2^1,s_3^1)=c$ であるようなゲーム形式 g がある。bP_1^1c であるから $g(s_1',s_2^1,s_3^1)=b$ となるようなプレイヤー 1 の戦略 s_1' があってはならない。一方 $g(s_1'',s_2^1,s_3^1)=a$ となるようなプレイヤー 1 の戦略 s_1'' があるとすると戦略の組 (s_1'',s_2^1,s_3^1) は $\mathbf{p}^3$ におけるナッシュ均衡となる（プレイヤー 1 は b を実現できないから）。しかし $a\notin f(\mathbf{p}^3)$ であるからそれは矛盾である。したがってそのような s_1'' はない。以上の議論によって (s_1^1,s_2^1,s_3^1) は $\mathbf{p}^2$ におけるナッシュ均衡であり（プレイヤー 1 は a も b も実現できず，他の 2 人は c を最も好む），その均衡において c が実現する。しかし $c\notin f(\mathbf{p}^2)$ であるからこれも矛盾である。よって f^* は実装可能ではない。

このように単調性だけでは実装可能性を導くことはできないが，NVP がどうしても必要なわけではない。個人合理性 (IR) という条件が成り立てば NVP よりも弱い条件で十分であることが示される。まず IR を定義する。

個人合理性 (Individual Rationality, IR)　すべての $a\in f(\mathbf{p})$, すべてのプレイヤー i について aR_ia^0 が成り立つとき「a^0 について個人合理性が成り立つ」と言う。

この条件は a が f によって選ばれるためには誰かが a より別のある 1 つの選択肢を厳密に好んでいてはいけないという条件である。定義からわかるようにこの個人合理性 (IR) を満たす社会的選択対応は NVP を満たさない可能性がある。しかし IR を満たす社会的選択対応には実装可能なものがあり，また IR は NVP を弱くした条件とは矛盾しない。まずその条件を説明しよう。

弱い意味の拒否権者の非存在 (WNVP)　プロフィール $\mathbf{p}$ において，ある選択肢 a^0 について，プレイヤー i 以外のすべてのプレイヤー（j で代表させる）がすべての選択肢（a，a^0 も含む）$b\in A$ に対して aR_jb という選好を持ち，プレイヤー i が aR_ia^0 という選好を持つならば $a\in f(\mathbf{p})$ である。IR と矛盾しないように aR_ia^0 という条件が付け加わっている。

IR を満たす社会的選択対応が実装可能となる例は次のようなものである。

■IR を満たし実装可能な社会的選択対応　次の社会的選択対応を定義する。

$$f^{IR}(\mathbf{p})=\{a\in A|\ \text{すべての } i \text{ について } aR_ia^0\}$$

a^0 は適当に選んだ 1 つの選択肢である。すべての i について $S_i = A$（各プレイヤーの戦略は選択肢の 1 つを選ぶこと）として次のゲーム形式を考える。

$$g^{IR}(s_1, s_2, \dots, s_n) = \begin{cases} a \text{（ある } a \text{ について } s_1 = s_2 = \cdots = s_n = a \text{ のとき）} \\ a^0 \text{（それ以外）} \end{cases}$$

全員が選ぶ選択肢が一致している場合それがゲームの結果となる。$a \in f^{IR}(\mathbf{p})$ のとき 1 人のプレイヤーが異なる戦略を選んでも a^0 しか実現させられない。したがって全員が選ぶ選択肢が一致し，かつそれが $f^{IR}(\mathbf{p})$ に含まれているような戦略の組はナッシュ均衡であり，そのナッシュ均衡において a^0 を含む f^{IR} のあらゆる選択肢が実現する可能性がある。一方全員が選ぶ選択肢が一致していて，それが $f^{IR}(\mathbf{p})$ に含まれない場合はあるプレイヤーにとって a^0 の方が好ましい選択肢なのでナッシュ均衡にはならない。定義上 a^0 は $f^{IR}(\mathbf{p})$ に含まれるので，すべてのナッシュ均衡において実現する選択肢は $f^{IR}(\mathbf{p})$ に含まれる。以上によって実装可能である。

IR と WNVP を満たす社会的選択対応について次の定理を得る。

定理 9.4. ある選択肢 a^0 について IR を満たし，かつ単調性とその a^0 について WNVP を満たす社会的選択対応 f は実装可能である。

証明. 証明は定理 9.3 の証明とほとんど同じである。そこで考えたゲーム形式を再び取り上げる。NVP を用いているのはその証明で考えたゲーム形式の (2) または (3) を満たすナッシュ均衡の場合であるから，それらが IR と矛盾しなければ NVP に代えて WNVP を用いて証明を完成させることができる。プロフィール $\mathbf{p}'$ において (2) を満たすナッシュ均衡は次のようなものであった。

i 以外のプレイヤー（j で代表させる）について $s_j = (\mathbf{p}, a, m)$ で $s_i \neq (\mathbf{p}, a, m)$，かつ $a \in f(\mathbf{p})$

この均衡の結果を a' とすると $a'R'_i a^0$，$a'R'_j a^0$ であれば IR と矛盾しない。i 以外のプレイヤーについては均衡とは異なる戦略を選ぶことによってどのような選択肢をも実現することができるので a' が $\mathbf{p}'$ において最も好む選択肢の 1 つでなければならず $a'R'_j a^0$ が成り立つ。プレイヤー i については，f が IR を満たすことより $aR_i a^0$ なので $a^0 \in L(R_i, a)$ である。すると i 以外のプレイヤーすべてが戦略 $(\mathbf{p}, a, m)$ を選んでいるときに i が a^0 を選べばそれが実現するのでもとの状態がナッシュ均衡であるためには $a'R'_i a^0$ でなければならない。

一方プロフィール $\mathbf{p}'$ において (3) を満たすナッシュ均衡は次のようなものであった。

「最も大きな整数を選んだプレイヤー（複数いればその内番号が最も大きいプレイヤー）i^* が選ぶ選択肢 a^{i^*} が実現する。」

この均衡の結果を a' とするとやはり $a'R'_i a^0$ がすべてのプレイヤーについて成り立てば IR と矛盾しない。どのプレイヤーも均衡とは異なる戦略を選ぶことによってどのような選択肢をも実現することができるので a' が $\mathbf{p}'$ において最も好む選択肢の 1 つでなければならず $a'R'_j a^0$ が成り立つ（プレイヤー i^* についてもこれは成り立つ）。

☺

混合戦略の場合の定理 9.3 の証明. プロフィール $\mathbf{p}'$ においてナッシュ均衡をなす混合戦略の組を $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ とし，それに含まれる純粋戦略の組の 1 つ $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ が次のようなもの

であるとする。

j 以外のすべてのプレイヤー（i で代表させる）について $s_i=(\mathbf{p},a,0)$，$s_j\neq(\mathbf{p},a,0)$ で $g(s_i,\mathbf{s}_{-i})=a'$

定理 9.3 の証明では「i 以外のどのプレイヤーも十分大きな m（整数）を選べば自分が望む選択肢を実現することができるのでこの戦略の組がナッシュ均衡であるためには

$$\text{すべての } j\neq i,\ \text{すべての } b\in A \text{ について } a'R'_jb \text{ である。}$$

が成り立たなければならず，これと NVP とにより $a'\in f(\mathbf{p}')$ である」という論理で証明を展開した。しかし $\boldsymbol{\mu}$ に含まれる別の純粋戦略の組 $\mathbf{s}'$ があって，あるプロフィール $\mathbf{p}'$ において

$$a'\in f(\mathbf{p}'),\ \text{すべての } k\neq i \text{ について } s'_k=(\mathbf{p}',a',0) \text{ かつ（ある選択肢 } a^i \text{について）} a^iP'_ia'$$

であるとすると，プレイヤー i は $\mathbf{s}_{-i}$ に対しては（i 以外の全員が同じ戦略を選んでいるのではないから）十分大きな m を選んで a^i を実現することができる。しかし $\mathbf{s}'_{-i}$ に対しては（i 以外の全員が同じ戦略を選んでいるので）a^i を実現することはできず，たかだか a' しか実現できない。

そこでプレイヤーの戦略の集合を次のような形に拡張する。

$$S_i=\mathscr{R}\times A\times\{\alpha|\alpha:\mathscr{R}^n\times A^n\to A\}\times\mathscr{N}$$

α は n 人の人々が選んだプロフィールの組と選択肢の組に 1 つの選択肢を対応させる関数である。各プレイヤーはプロフィール，選択肢，整数値とともにその関数を選択する。

定理 9.3 の証明と同様に以下の 3 つに分けてゲーム形式を考える。

(1). あるプロフィール $\mathbf{p}$，選択肢 a，整数 m，関数 α について

$$s_1=s_2=\cdots=s_n=(\mathbf{p},a,\alpha(\cdot),m),\ \alpha(\mathbf{p},\dots,\mathbf{p},a,\dots,a)=a\in f(\mathbf{p})$$
$$\text{のとき } g(s_1,s_2,\dots,s_n)=a \text{ とする}$$

全員の戦略が一致し，かつ選んだ関数が対応する選択肢が a と一致して，それが $f(\mathbf{p})$ に含まれるならば a がゲームの結果となる。

(2). あるプレイヤー i とそれ以外のすべてのプレイヤー（j で代表させる）について $s_j=(\mathbf{p},a,\alpha(\cdot),m)$，$s_i=(\mathbf{p}^i,a^i,\alpha^i(\cdot),m)\neq(\mathbf{p}^j,a,\alpha(\cdot),m)$ かつ $\alpha(\mathbf{p},\dots,\mathbf{p},a,\dots,a)=a\in f(\mathbf{p})$ のとき

$$g(s_1,s_2,\dots,s_n)=\begin{cases}\alpha^i(\mathbf{p},\dots,\mathbf{p}^i,\dots,\mathbf{p},a,\dots,a^i,\dots,a)\\ \quad(\alpha^i(\mathbf{p},\dots,\mathbf{p}^i,\dots,\mathbf{p},a,\dots,a^i,\dots,a)\in L(a,R_i)\text{ のとき})\\ a\ \text{（それ以外のとき）}\end{cases}$$

1 人（プレイヤー i）を除く全員の戦略が一致し，かつ選んだ関数が対応する選択肢が（i も他の人々と同じ戦略を選ぶとき）a と一致して，それが $f(\mathbf{p})$ に含まれ，もしプレイヤー i が選んだ関数 $\alpha^i(\cdot)$ が対応する選択肢がそれ以外の人々が選んだ選択肢 a と比べて（他のプレイヤーが選んだプロフィールにおける）プレイヤー i 自身の選好から見て好ましくないものか，または無差別であるようなものならば $\alpha^i(\cdot)$ がゲームの結果となり，そうでなければ a がゲームの結果となる。

(3). 以上 2 つの場合以外は

$$g(s_1,s_2,\dots,s_n)=\alpha^{i*}(\mathbf{p}^1,\dots,\mathbf{p}^n,a^1,\dots,a^n)$$

$\alpha^{i*}(\cdot)$ はプレイヤー i^* が選んだ関数であり，プレイヤー i^* は次の条件を満たすプレイヤーである。

$$i^*=\max\{i|m^i=\max_j m^j\}\ (m^j\text{はプレイヤー }j\text{ が選んだ整数の値})$$

i^* は最も大きな整数を選んだプレイヤーであるが，そのようなプレイヤーが複数いる場合にはその中で最も最後に位置するプレイヤーである（1 から n までプレイヤーに順番がついている)。

このように定義されたゲーム形式が f を実装することを示そう。

まず任意の $a\in f(\mathbf{p})$ について戦略の組が次の式を満たすとする。

$$s_1=\cdots=s_n=(\mathbf{p},a,\alpha(\cdot),m)\ \text{かつ}\ \alpha(\mathbf{p},\dots,\mathbf{p},a,\dots,a)=a \tag{9.7}$$

(1) によりこの戦略の組によって a が実現する。(2) によってその状態で 1 人のプレイヤー i が戦略を変更しても $L(a,R_i)$ に含まれる選択肢しか実現することができないので (9.7) を満たす戦略の組は（$\mathbf{p}$ が真のプロフィールのとき）ナッシュ均衡である。したがって任意の $a\in f(\mathbf{p})$ がこのゲームのナッシュ均衡の結果として実現される。

ある a について (9.7) を満たす純粋戦略の組によって実現される状態（ナッシュ均衡とは限らない）において $a\in f(\mathbf{p})$ であるが，真のプロフィールは $\mathbf{p}$ とは異なる $\mathbf{p}'$ であると仮定する。(1) によりこのゲームの結果は a である。各プレイヤー i が aR_ib を満たす選択肢を b として次のような戦略 $s_i=(\mathbf{p}^i,a^i,\alpha^i,m^i)$ を選ぶ場合を考えてみよう。

$$(\mathbf{p}^i,a^i,m^i)=(\mathbf{p},a,m) \tag{9.8}$$

$$\alpha^i(\hat{\mathbf{p}}^1,\dots,\hat{\mathbf{p}}^n,\hat{a}^1,\dots,\hat{a}^n)=\begin{cases} b\ ((\hat{\mathbf{p}}^1,\dots,\hat{\mathbf{p}}^n,\hat{a}^1,\dots,\hat{a}^n)=(\mathbf{p},\dots,\mathbf{p},a,\dots,a)\ \text{のとき}) \\ \alpha(\hat{\mathbf{p}}^1,\dots,\hat{\mathbf{p}}^n,\hat{a}^1,\dots,\hat{a}^n)\ (\text{それ以外のとき}) \end{cases} \tag{9.9}$$

$b\in L(a,R_i)$ であるから (2)，(9.8)，(9.9) より

$$g(s_i,\mathbf{s}^*_{-i})=b$$

である（$\mathbf{s}^*_{-i}$ は i 以外のプレイヤーが $(\mathbf{p},a,\alpha,m)$ を選ぶ戦略の組）。さらに α^i が $(\hat{\mathbf{p}}^1,\dots,\hat{\mathbf{p}}^n,\hat{a}^1,\dots,\hat{a}^n)=(\mathbf{p},\dots,\mathbf{p},a,\dots,a)$ のときを除いて α と一致することにより，$(\hat{\mathbf{p}}^{-i},\hat{\mathbf{a}}^{-i})\neq(\mathbf{p},\dots,\mathbf{p},a,\dots,a)$ であるような $\boldsymbol{\mu}_{-i}$（i 以外のプレイヤーの戦略の組，以下同様）に含まれるすべての戦略の組 $\hat{\mathbf{s}}_{-i}=(\hat{\mathbf{p}}^{-i},\hat{\mathbf{a}}^{-i},\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{-i},\hat{\mathbf{m}}^{-i})$ について

$$g(s_i,\hat{\mathbf{s}}_{-i})=g(s^*_i,\hat{\mathbf{s}}_{-i})\ (\text{このとき }s_i=s^*_i=(\mathbf{p},a,\alpha,m)\text{ である})$$

が成り立つ。もし bP'_ia であればプレイヤー i は $\boldsymbol{\mu}_{-i}$ に対して s^*_i ではなく s_i を選ぶことによってより大きな（期待）効用を実現することができる。したがって次の結論を得る。

$$\text{すべての }i,\ b\text{ について }aR_ib\text{ ならば }aR'_ib\text{ である}$$

単調性により $a\in f(\mathbf{p})$ ならば $a\in f(\mathbf{p}')$ でなければならない。

次に $\boldsymbol{\mu}$ に含まれる次のような純粋戦略の組 $\mathbf{s}^*=(s_1^*,s_2^*,\dots,s_n^*)$ を考える。

i 以外のプレイヤー（j で代表させる）について

$s_j^*=(\mathbf{p},a,\alpha(\cdot),m)$，および$\alpha(\mathbf{p},\dots,\mathbf{p},a,\dots,a)=a\in f(\mathbf{p})$ で $s_i^*\neq(\mathbf{p},a,\alpha(\cdot),m)$

これは上記の (2) に当てはまる戦略の組である。この戦略の組が実現する結果を a' とする。各 $j\neq i$ について

$$\text{すべての } b\in A \text{ について } b^jR'_jb \tag{9.10}$$

を満たす b^j をとる。また

$$(\mathbf{p}^j,a^j)=(\mathbf{p},a) \tag{9.11}$$

$$m^j>\max\{m^i,m\} \tag{9.12}$$

および

$$\alpha^j(\hat{\mathbf{p}}^1,\dots,\hat{\mathbf{p}}^n,\hat{a}^1,\dots,\hat{a}^n)=\begin{cases} b^j\ ((\hat{\mathbf{p}}^1,\dots,\hat{\mathbf{p}}^n,\hat{a}^1,\dots,\hat{a}^n)=(\mathbf{p},\dots,\mathbf{p}^i,\dots,\mathbf{p},a,\dots,a^i,\dots,a)\text{ のとき}) \\ \alpha(\hat{\mathbf{p}}^1,\dots,\hat{\mathbf{p}}^n,\hat{a}^1,\dots,\hat{a}^n)\ (\text{それ以外のとき}) \end{cases} \tag{9.13}$$

を満たす $s_j=(\mathbf{p}^j,a^j,\alpha^j(\cdot),m^j)$ をとる。s_j は m^j と $\alpha^j(\cdot)$ 以外については $s_j^*=(\mathbf{p},a,\alpha(\cdot),m)$ と一致する。また，その $\alpha^j(\cdot)$ は $(\mathbf{p},\dots,\mathbf{p}^i,\dots,\mathbf{p},a,\dots,a^i,\dots,a)$ 以外では $\alpha(\cdot)$ と一致する。(9.11)，(9.12)，(9.13) より

$$g(s_j,\mathbf{s}_{-j}^*)=b^j \tag{9.14}$$

である。さらに $\boldsymbol{\mu}_{-j}$ に含まれる任意の $\hat{\mathbf{s}}_{-j}\neq\mathbf{s}_{-j}^*$ に対して

$$g(s_j,\hat{\mathbf{s}}_{-j})=b^j \tag{9.15}$$

または

$$g(s_j,\hat{\mathbf{s}}_{-j})=g(s_j^*,\hat{\mathbf{s}}_{-j})\ (\alpha^j=\alpha\text{のとき}) \tag{9.16}$$

が成り立つ（プレイヤー j は m^j が最大となるように選ぶ)。したがって (9.10)，(9.14)，(9.15)，(9.16) により，もし次の式が成り立たなければプレイヤー j は $\boldsymbol{\mu}_{-j}$ に対して s_j^* よりも s_j を選んだ方が大きな（期待）利得を実現することができる。

$$\text{すべての } b\in A \text{ について } a'R'_jb \tag{9.17}$$

すべての $j\neq i$ について (9.17) が成り立つならば NVP により $a'\in f(\mathbf{p}')$ である。

(3) を満たす戦略の組についても同様の議論が展開できる。その戦略の組 $\mathbf{s}^*=(s_1^*,\dots,s_n^*)$ が実現する結果を a' とする。各 $j\neq i^*$ について「すべての $b\in A$ について $b^jR'_jb$」を満たす b^j をとる。また

$$(\mathbf{p}^j,a^j)=(\mathbf{p}_j^*,a_j^*) \tag{9.18}$$

$$m^j>\max_{i\neq j}\{m^i\} \tag{9.19}$$

および

$$\alpha^j(\hat{\mathbf{p}}^1,\dots,\hat{\mathbf{p}}^n,\hat{a}^1,\dots,\hat{a}^n) = \begin{cases} b^j\ ((\hat{\mathbf{p}}^1,\dots,\hat{\mathbf{p}}^n,\hat{a}^1,\dots,\hat{a}^n)=(\mathbf{p}_1^*,\dots\mathbf{p}_n^*,a_1^*,\dots,a_n^*)\text{ のとき}) \\ \alpha^{i*}(\hat{\mathbf{p}}^1,\dots,\hat{\mathbf{p}}^n,\hat{a}^1,\dots,\hat{a}^n)\ (\text{それ以外のとき}) \end{cases} \tag{9.20}$$

を満たす $s_j=(\mathbf{p}^j,a^j,\alpha^j(\cdot),m^j)$ をとる。$(\mathbf{p}_1^*,\dots\mathbf{p}_n^*,a_1^*,\dots,a_n^*)$ はこの場合の $\mathbf{s}^*$ に含まれる戦略の組である。(9.18), (9.19), (9.20) より

$$g(s_j,\mathbf{s}_{-j}^*)=b^j \tag{9.21}$$

である。さらに $\boldsymbol{\mu}_{-j}$ に含まれる任意の $\hat{\mathbf{s}}_{-j}\neq\mathbf{s}_{-j}^*$ に対して

$$g(s_j,\hat{\mathbf{s}}_{-j})=b^j \tag{9.22}$$

または

$$g(s_j,\hat{\mathbf{s}}_{-j})=g(s_j^*,\hat{\mathbf{s}}_{-j})\ (\alpha^j=\alpha^{i*}\text{のとき}) \tag{9.23}$$

が成り立つ。したがって (9.21), (9.22), (9.23) により，もし次の式が成り立たなければプレイヤー j は $\boldsymbol{\mu}_{-j}$ に対して s_j^* よりも s_j を選んだ方が大きな（期待）利得を実現することができる。

$$\text{すべての } b\in A \text{ について } a'R_j'b \tag{9.24}$$

すべての $j\neq i$ について (9.24) が成り立つならば NVP により $a'\in f(\mathbf{p}')$ である。 ☺

以上で本稿で取り上げたすべての定理の証明が終わった。

索引

著者略歴

田中靖人（たなか・やすひと）

1953 年	大阪府岸和田市春木生まれ
1976 年	京都大学工学部航空工学科卒業
1977 年	京都大学大学院工学研究科修士課程航空工学専攻中退（修士号取らず）
この間	コンピュータプログラマー，学習塾講師などを経験
1983 年	横浜国立大学大学院経済学研究科修士課程修了
1986 年	東京大学大学院経済学研究科博士課程単位修得
その後	山形大学人文学部経済学科講師・同助教授，中央大学法学部助教授・同教授を経て
現在	同志社大学経済学部教授，博士・経済学（中央大学）
専攻	理論経済学，ゲーム理論とその応用，社会的選択理論

著書

『ゼロから始める経済学（改訂版）』（中央大学生協出版局, 2000）

『ゼロから始める国際経済学（改訂版）』（中央大学生協出版局, 2000）

『ゲーム理論と寡占』（中央大学出版部, 2001）

主要論文

“Export subsidies under dynamic duopoly”, *European Economic Review* Vol. 38, Elsevier, 1994.

“Long run equilibria in an asymmetric oligopoly”, *Economic Theory* Vol. 14, Springer-Verlag, 1999.

“A finite population ESS and long run equilibria in an n players coordination game”, *Mathematical Social Sciences* Vol. 39, Elsevier, 2000.

“Stochastically stable states in an oligopoly with differentiated goods: Equivalence of price and quantity strategies”, *Journal of Mathematical Economics* Vol. 34, Elsevier, 2000.

“Profitability of price and quantity strategies in a duopoly with vertical product differentiation”, *Economic Theory* Vol. 17, Springer-Verlag, 2001.

“Profitability of price and quantity strategies in an oligopoly”, *Journal of Mathematical Economics* Vol. 35, Elsevier, 2001.

“Evolution to equilibrium in an asymmetric oligopoly with differentiated goods”, *International Journal of Industrial Organization* Vol. 19, Elsevier, 2001.

“An alternative direct proof of Gibbard’s random dictatorship theorem”, *Review of Economic Design*, Vol. 8, Springer-Verlag, 2003.

“Oligarchy for social choice correspondences and strategy-proofness”, *Theory and Decision*, Vol. 55, Kluwer Academic Publishers, 2003.

“On the equivalence of the Arrow impossibility theorem and the Brouwer fixed point theorem”, *Applied Mathematics and Computation*, 近刊, Elsevier.

“A topological approach to the Arrow impossibility theorem when individual preferences are weak orders”, *Applied Mathematics and Computation*, 近刊, Elsevier.

“A topological proof of Eliaz’s unified theorem of social choice theory”, *Applied Mathematics and Computation*, 近刊, Elsevier.

`mailto:yatanaka@mail.doshisha.ac.jp`
`http://www1.doshisha.ac.jp/~yatanaka/index.html`